

DIPLOMARBEIT

Der Globale Krümmungsradius für offene und
geschlossene Kurven im $\mathbb{R}^N$

Angefertigt am Mathematischen Institut

Vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dezember 2004

von

Henryk Gerlach

aus

Mannheim-Neckarau

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
1 Geometrische Grundlagen	1
2 Die Torus-Eigenschaft einer Kurve	15
3 Der Globale Krümmungsradius und eine Alternative	28
4 Regularität von $\rho_{pp}[\Gamma](\cdot)$ und $\rho_{pt}[\Gamma](\cdot)$	51

Einleitung

Die Mathematik betrachtet eine geschlossene Kurve in der Regel als eine stetige Abbildung von einer Kreislinie in den euklidischen Raum. Kurven eignen sich, um physikalische Objekte, wie Seile oder lange Molekül-Ketten wie DNS-Stränge zu modellieren. Der wichtigste Unterschied zur mathematischen Kurve ist, dass physikalische Objekte eine Dicke haben. Deshalb muss man bei der Modellierung physikalischer Kurven durch mathematische eine Nebenbedingung einführen, die sicherstellt, dass die Kurve genug Abstand zu sich selbst hat, so dass man sie etwas aufdicken könnte.

Hier gibt es verschiedene Ansätze. Einige finden sich in dem Buch *Ideal Knots* ([SKK99]), das von A. STASIAK, V. KATRITCH und L.H. KAUFFMAN herausgegeben wurde. In [KS98] verglichen R.B. KUSNER und J.M. SULLIVAN die *distortion thickness* mit der *curvature thickness*. J. O'HARA definierte in [O'H91] eine Variante von Selbstabstoßungspotentialen auf Kurven.. Für eines dieser Potentiale, die sogenannte *Möbius-Energie*, zeigten M.H. FREEDMAN, Z. HE und Z. WANG in [FW94] die Existenz von Minimierern in Primkontenklassen.

Das für die Variationsrechnung zugänglichste ist gegenwärtig das Konzept des *Globalen Krümmungsradius*, das von O. GONZALES und J. MADDOCKS in [GM99] eingeführt wurde. Durch je drei Punkte x, y, z im Raum gibt es einen kleinsten Kreis mit Radius $R(x, y, z)$. Dies ist gerade der Umkreisradius des Dreiecks $\Delta(xyz)$, wenn sich die Punkte x, y, z in allgemeiner Lage befinden. Der Globale Krümmungsradius $\rho_{ppp}[\gamma](s)$ einer Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ in einem Parameter s des Definitionsbereichs I ist nun das Infimum von $R(\gamma(s), \gamma(\cdot), \gamma(\cdot))$ über fast alle Parameter des Definitionsbereichs der Kurve:

$$\rho_{ppp}[\gamma](s) := \inf_{\sigma, \tau \in I \setminus \{s\}, \sigma \neq \tau} R(\gamma(s), \gamma(\sigma), \gamma(\tau)).$$

Der Globale Krümmungsradius $\Delta_{ppp}[\gamma]$ der Kurve γ ist das Infimum von $\rho_{ppp}[\gamma](s)$ über alle $s \in I$ (vgl. auch Definition 3.1). Es stellt sich heraus, dass einer Kurve γ mit $\Delta_{ppp}[\gamma] > 0$ eine „Dicke“ zugeordnet werden kann. Ist γ glatt, so stimmt γ mit dem *normalen Injektivitätsradius* der klassischen Differentialgeometrie überein (vgl. [GM99, Section 3]). Die geometrischen und analytischen Aspekte des Globalen Krümmungsradius auf geschlossenen und nur rektifizierbaren Kurven im $\mathbb{R}^3$ wurden detailliert in [SvdM03a] untersucht.

GONZALES MADDOCKS, F. SCHURICHT und H. VON DER MOSEL zeigten in [GMSvdM02], dass Minimierer von nicht linearen elastischen Energien auf elastischen Stäben mit einer Kurve γ als Zentrallinie unter der Nebenbedingung $\Delta_{ppp}[\gamma] \geq \Theta > 0$ existieren. Insbesondere zeigten sie die Existenz idealer Knoten (vgl. [GMSvdM02, Section 5]), d.h. die Existenz einer längen-

minimierenden Kurve in einer Knotenklasse mit vorgegebener Dicke (Dies wurde mit anderen Methoden auch in [CKS02] und [GdlL03] gezeigt).

Die Euler-Lagrange-Gleichungen für Variationsprobleme von elastischen Stäben vorgegebener Mindestdicke wurden in [SvdM03b] behandelt, während die entsprechenden Variationsgleichungen in [SvdM04] zu notwendigen Bedingungen für die Kurvennormale eines idealen Knotens führten.

In [GMS02] untersuchten GONZALES, MADDOCKS und J. SMUTNY (siehe auch [S04]) dem Globalen Krümmungsradius verwandte geometrische Konzepte. Als Alternative zum oben definierten R betrachten sie z.B. den Punkt-Tangenten-Radius $pt(s, t)$, der in den Parametern $s, t \in I$ einer stetig differenzierbaren Kurve γ als der Radius des Kreises definiert ist, der durch die Punkte $\gamma(s)$ und $\gamma(t)$ geht und in $\gamma(t)$ tangential zu $\gamma'(t)$ ist. Durch Infimumsbildung ähnlich zum Globalen Krümmungsradius erhalten sie eine mit $\Delta_{pt}[\gamma]$ bezeichnete Größe, die ebenfalls eine Charakterisierung der Dicke liefert.

In ihrer Doktorarbeit [S04] untersuchte SMUTNY unter anderem die Ideale Kleeblattschlinge und den 4.1-Knoten und berechnete eine aus Kreisbögen zusammengesetzte Näherung. Die Daten lassen vermuten, dass die Ideale Kleeblattschlinge nicht zweimal stetig differenzierbar ist, was bedeuten würde, dass die in [GMSvdM02] bewiesene $C^{1,1}$ -Regularität der Bogenlängenparametrisierung von Kuven γ mit $\Delta_{ppp}[\gamma] > 0$ für ideale Knoten optimal ist.

In [GMSvdM02] wurde gezeigt, dass eine rektifizierbare Kurve γ im $\mathbb{R}^3$ mit $\Delta_{ppp}[\gamma] > 0$ genau dann eine Dicke $\Delta_{ppp}[\gamma]$ größer oder gleich $\Theta > 0$ hat, wenn sich um jeden Punkt x im Bild von γ ein offener Horntorus M mit Radius Θ entlang γ legen läßt, so dass er die Kurve nicht schneidet. Diese Eigenschaft einer Kurve wird in der hier vorliegenden Arbeit als *Torus-Eigenschaft* (vgl. Definition 2.3) bezeichnet und liefert den Anfangspunkt unserer Untersuchungen.

J. CANTARELLA, KUSNER und SULLIVAN verwendeten in [CKS02] schließlich eine auf Links angepasste Version des Globalen Krümmungsradius, um nach *Idealen Links* zu suchen, d.h. nach einem Längenminimierer miteinander verschlungener Kurven einer gegebenen Dicke in einer vorgeschriebenen Verschlingungsklasse. Sie fanden eine untere Schranke an die Länge der Links, die es ihnen ermöglichte einige einfache Ideale Links anzugeben. Insbesondere gaben sie Beispiele Idealer Links, die nur in $C^{1,1}$ und nicht in C^2 sind. Dabei zeigten sie auch, dass Lösungen derartiger Variationsprobleme nicht eindeutig sein müssen, da sie ganze Kontinua Idealer Links in einer Verschlingungsklasse fanden.

In der hier vorliegenden Arbeit betrachten wir nicht nur geschlossene, sondern auch offene Kurven im $\mathbb{R}^N$, d.h. solche die auf einem abgeschlossenen endlichen Intervall definiert sind. In **Abschnitt 1** definieren wir die Torus-Eigenschaft für allgemeine Punktmengen im $\mathbb{R}^N$. Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ hat in einem ihrer Punkte $x \in \Omega$ die *Torus-Eigenschaft bzgl. $\Theta(x) > 0$* , wenn sich um den Punkt x ein offener Horntorus mit Radius $\Theta(x)$ legen läßt, der die Menge Ω nicht schneidet. Gibt es $\Theta > 0$, so dass Ω in jedem Punkt $x \in \Omega$ die Torus-Eigenschaft bzgl. Θ hat, so sagen wir, dass die Menge Ω die *Torus-Eigenschaft bzgl. Θ* hat.

In Lemma 1.7 zeigen wir, dass man die Torus-Eigenschaft in einem Punkt auf Schnitten von zweidimensionalen Ebenen mit der Menge überprüfen kann. Dies erleichtert die Anschauung merklich. Es stellt sich in Lemma 1.11 heraus, dass der Torus in nicht isolierten Punkten einer Menge mit der Torus-Eigenschaft eine eindeutige Ausrichtung hat und diese unabhängig von der Dicke Θ des Torus ist. Einem Punkt $x \in \Omega$ kann man also einen bis auf Vorzeichen eindeutigen Richtungsvektor $T_x \in \mathbb{S}^{N-1}$ zuordnen, der im Punkt x senkrecht auf der Seele des Torus steht. Betrachtet man zwei nahe beieinander liegende Punkte einer Menge mit der Torus-Eigenschaft, so zeigt sich in Lemma 1.12, dass der maximale Winkel der Richtungsvektoren (ohne Berücksichtigung des Vorzeichens) nur vom Abstand der Grundpunkte und von Θ abhängt. Hat eine Menge in einer Folge von Punkten die Torus-Eigenschaft bzgl. $\Theta > 0$, so auch in jedem ihrer Häufungspunkte, d.h. die Torus-Eigenschaft ist stetig, wie Lemma 1.13 zeigt.

In **Abschnitt 2** definieren wir die Torus-Eigenschaft für Kurven als Torus-Eigenschaft des Bildes der Kurven und übertragen die Lemmata aus dem vorigen Abschnitt auf Kurven. Hat eine Kurve die Torus-Eigenschaft in einem Punkt und ist in diesem differenzierbar, so muss der Richtungsvektor des Torus in diesem parallel zur Tangente in diesem Punkt sein (vgl. Lemma 2.5).

Lemma 2.10 zeigt, dass eine injektive Kurve mit der Toruseigenschaft auf einer kleinen Umgebung immer ungefähr in die gleiche Richtung läuft. Mit Hilfe der guten Kontrolle über die Richtungsvektoren wird in Satz 2.13 für eine Lipschitz-stetige, injektive und damit auf einer dichten Teilmenge reguläre Kurve γ mit der Torus-Eigenschaft die Funktion $\frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ Lipschitz-stetig fortgesetzt. In Satz 2.14 folgern wir daraus sogar einmal stetige Differenzierbarkeit, sofern γ genügend gut (z.B. nach Bogenlänge) parametrisiert ist.

In **Abschnitt 3** wird schließlich der Globale Krümmungsradius Δ_{ppp} auf offenen und geschlossenen Kurven untersucht. In den Lemmata 3.3 und folgende geht es um Abschätzungen der Funktion R . In Lemma 3.7 wird gezeigt, dass Δ_{ppp} invariant unter Umparametrisierungen der Kurve mit Homöomorphismen ist. Nur injektive Kurven können einen Globalen Krümmungsradius

größer 0 haben, wie in Lemma 3.8 gezeigt wird. In Definition 3.10 wird mit Δ_{pt} eine Alternative des Globalen Krümmungsradius definiert, die auf der pt -Funktion basiert. In Satz 3.25 wird aber schließlich gezeigt, dass für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven Δ_{pt} und Δ_{ppp} äquivalent sind.

In diesem Abschnitt wird auch auf Punkte eingegangen, in denen der Globale Krümmungsradius auf einer Kurve γ „angenommen“ wird. Es wird der sogenannte Minimalball eingeführt. Betrachtet man eine konvergente Minimalfolge $\{(r_i, s_i, t_i)\}_i$ von Parametern, so dass $R(\gamma(r_i), \gamma(s_i), \gamma(t_i))$ gegen $\Delta_{ppp}[\gamma]$ konvergiert und bestimmt zu (r_i, s_i, t_i) jeweils den Mittelpunkt c_i des kleinsten Balls durch die Punkte $\gamma(r_i), \gamma(s_i), \gamma(t_i)$, so konvergiert eine Teilfolge der $\{c_i\}_i$ gegen einen Grenzpunkt $c \in \mathbb{R}^N$. Den Ball $B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c)$ nennen wir einen Minimalball. Berührt die Kurve einen Minimalball in zwei nicht antipodischen Punkten, so zeigen wir in Satz 3.27, dass die Kurve auf einem Großkreis auf dem Minimalball die beiden Punkte verbinden muss.

In **Abschnitt 4** wird für $\rho_{ppp}[\gamma](\cdot)$ und das ähnlich definierte $\rho_{pt}[\gamma](\cdot)$ gezeigt, dass sie oberhalbstetig sind (vgl. Lemmata 4.1 und 4.4). Ist $\rho_{ppp}[\gamma](\cdot)$ in einem Parameter unendlich oder auf einer Folge von Punkten unbeschränkt, so folgt, dass die Kurve γ injektiv ist und auf einer Linie verläuft (Lemmata 4.2 und 4.3).

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. Zuvorderst danke ich Prof. Dr. Heiko von der Mosel für das schöne Thema und die intensive Betreuung.

Dem Sonderforschungsbereich 611 ‘Singuläre Phänomene und Skarlierung in mathematischen Modellen’ an der Universität Bonn danke ich für die großzügige Förderung meiner Arbeit.

Ein besonderer Dank geht an Philipp Reiter für viele inspirierende Diskussionen, das mathematische Korrekturlesen der Arbeit und nicht zuletzt für viele schöne (Koch-)Abende.

Weiter danke ich Muhsin Kazar für das Korrekturlesen der Arbeit.

Bonn am Rhein, den 27. Januar 2005

Henryk Gerlach

1 Geometrische Grundlagen

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst einige geometrische Objekte einführen. Dann definieren wir die Torus-Eigenschaft für Teilmengen des $\mathbb{R}^N$.

In Abschnitt 2 werden wir Kurven betrachten, um die sich ein offener Volltorus legen läßt, ohne die Kurve zu schneiden. Betrachte dazu folgende

Definition 1.1 (Torus). Für $\Theta > 0$ heißt

$$M(P, T, \Theta) := \bigcup_{z \in C(P, T, \Theta)} B_\Theta(z) \subset \mathbb{R}^N$$

der **Torus in** $P \in \mathbb{R}^N$ **entlang des Richtungsvektors** $T \in \mathbb{S}^{N-1}$ **mit Dicke** Θ .

Hierbei ist

$$C(P, T, \Theta) := \{\Theta v + P \mid v \in \mathbb{S}^{N-1} \text{ und } v \perp T\} (\cong \mathbb{S}^{N-2}) \quad (1)$$

die **Seele des Torus in** P **mit Radius** Θ **orthogonal zu** T .

Die Menge $B_\Theta(P) \setminus M(P, T, \Theta)$ nennen wir den **Trichter des Torus**.

Die obige Menge $M(P, T, \Theta)$ heißt eigentlich Horntorus (vgl. [LdM02, Bd. 5, S. 223]), da es jedoch die einzige Form eines Torus ist, die in dieser Arbeit auftaucht, verzichten wir auf den spezifizierenden Zusatz.

Es wird später hilfreich sein, eine stetige Parametrisierung des Torus zu kennen, um diesen an einer Menge entlang bewegen zu können. Dazu stellen wir uns den Torus im Nullpunkt entlang des ersten Standardbasisvektors vor. Durch Drehung und Translation können wir ihn dann an die entsprechende Stelle im $\mathbb{R}^N$ verschieben.

Definition 1.2 (Parametrisierung des Torus). Mit

$$m_\Theta(P, T, x) : \mathbb{R}^N \times (\mathbb{S}^{N-1} \setminus \{-e_1\}) \times M(0, e_1, \Theta) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

bezeichnen wir die stetige Parametrisierung von $M(P, T, \Theta)$. Hierzu definieren wir m_Θ als Verkettung von isometrischen Abbildungen:

$$m_\Theta(P, T, x) := \tau_P \circ D_T(x)$$

Dabei ist D_T die eindeutige Abbildung, die den ersten Standardbasisvektor e_1 auf den Vektor T dreht und dabei die von e_1 und T aufgespannte Ebene $\text{span}(e_1, T)$ invariant läßt. Die Abbildung τ_P ist die Translation um den Vektor P . Als Verknüpfung von stetigen Abbildungen ist m_Θ stetig.

Später werden wir Kurven betrachten, die eine gewisse Dicke haben sollen. Dazu fordern wir, dass jeder Bildpunkt der Kurve mit einem offenen Torus umschlossen werden kann, ohne die Kurve zu schneiden. Da viele Eigenschaften nur vom Bild der Kurve abhängen, definieren wir die Torus-Eigenschaft allgemein für Teilmengen des $\mathbb{R}^N$.

Definition 1.3 (Torus-Eigenschaft für Mengen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Wir sagen, Ω hat die **Torus-Eigenschaft im Punkte** $x \in \Omega$, falls ein $\Theta > 0$ und ein $T \in \mathbb{S}^{N-1}$ existieren, so dass

$$M(x, T, \Theta) \cap \Omega = \emptyset.$$

Die Menge Ω hat die Torus-Eigenschaft bezüglich $\Theta > 0$, wenn sie in allen ihre Punkten $x \in \Omega$ zu festem Θ die Torus-Eigenschaft hat. Wir sagen dann kurz, „ Ω hat die Torus-Eigenschaft“.

In Abbildung 5 auf Seite 17 sind einige Beispiele und Gegenbeispiele für Mengen mit der Torus-Eigenschaft abgebildet. Da wir die obige Definition hauptsächlich für Bilder von Kurven verwenden werden, sind diese Beispiele für uns an dieser Stelle ausreichend.

Die beiden folgenden Aussagen ergeben sich direkt aus der Definition.

Lemma 1.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

- (i) Wenn Ω die Torus-Eigenschaft hat, so hat auch jede Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ die Torus-Eigenschaft.
- (ii) Innere Punkte von Ω haben nicht die Torus-Eigenschaft.

□

In den folgenden Beweisen wollen wir uns häufig auf affine Unterräume des $\mathbb{R}^N$ beziehen, die wir in Form eines Stützvektors q und einer Orthonormalbasis q_i als gegeben ansehen.

Definition 1.5 (Affine Hyperebene). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ mit $\dim \operatorname{span}(U) =: k \leq N$,

$$E^k(q, U) := \{q + v \mid v \in \operatorname{span}(U)\} = \{q + v \mid v \in \operatorname{span}(q_1, \dots, q_k)\}$$

bezeichne die **Affine Hyperebene parallel zu U mit Stützvektor $q \in \mathbb{R}^N$** . Dabei sei $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{R}^N$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(U)$ und wir können q so wählen, dass $q \perp \operatorname{span}(U)$ gilt.

Lemma 1.7 wird später zeigen, dass es oft reicht, sich auf kleinere affine Unterräume zu beschränken. Dazu müssen wir den Torus auch innerhalb affiner Unterräume definieren, denn es ist zunächst nicht klar, wie die Schnitte von Tori mit den affinen Hyperebenen aussehen.

Definition 1.6 (Torus im affinen Unterraum). Sei $E^k(q, \{q_1, \dots, q_k\})$ eine k -dimensionale affine Unterebene des $\mathbb{R}^N$, die wir abkürzend als E^k bezeichnen. Weiter seien $\Theta > 0$, $P \in E^k$ und $T \in \mathbb{S}_{E^k}^{k-1}$ (wie unten definiert) gegeben. Wir definieren folgende Hilfsmengen:

$$\mathbb{S}_{E^k}^{k-1} := \{v \in (E^k - q) \mid |v| = 1\} \quad (2)$$

$$C_{E^k}(P, T, \Theta) := \{\Theta v + P \mid v \in \mathbb{S}_{E^k}^{k-1} \text{ und } v \perp T\} (\cong \mathbb{S}^{k-2}) \quad (3)$$

$$B_{E^k; \Theta}(z) := \{v \in E^k \mid |v - z| < \Theta\}. \quad (4)$$

Die Menge

$$M_{E^k}(P, T, \Theta) := \bigcup_{z \in C_{E^k}(P, T, \Theta)} B_{E^k; \Theta}(z)$$

heißt der **Torus in P entlang des Richtungsvektors $T \in \mathbb{S}^{N-1}$ mit Dicke Θ im affinen Unterraum $E^k(q, \{q_1, \dots, q_k\})$.**

Für $k = N$ stimmt die obige Definition natürlich mit der ursprünglichen überein:

$$M_{E^N(0, \{e_1, \dots, e_N\})}(P, T, \Theta) = M(P, T, \Theta).$$

Der $\mathbb{R}^N$ ist für die geometrische Anschauung ab $N \geq 4$ recht unhandlich. In den Beweisen der nächsten Abschnitte wollen wir meist nur überprüfen, ob ein Punkt in einem gegebenen Torus liegt oder nicht. Da oft nur zwei Punkte und ein Richtungsvektor beteiligt sind, reicht es fast immer, sich auf den zweidimensionalen Fall zu beschränken und nur den Schnitt des Torus mit der Ebene durch die zwei Punkte und den Richtungsvektor zu betrachten. Man bekommt dann die gleiche Situation wie für $N = 2$: Der Torus besteht aus zwei offenen Scheiben gleicher Größe mit einem gemeinsamen Randpunkt und tangential an den Richtungsvektor.

Man kann jedoch auch nur auf den k -dimensionalen Fall ($k > 2$) reduzieren, falls bei Reduktion auf den zweidimensionalen Fall zuviel Information verloren ginge.

Lemma 1.7 (Reduktion auf den niederdimensionalen Fall). Sei $\Theta > 0$.

- (i) Seien $\Theta > 0$, der Punkt $P \in \mathbb{R}^N$, sowie der Richtungsvektor $T \in \mathbb{S}^{N-1}$ gegeben. Weiter sei $2 \leq k \leq N$ und $E^k := E^k(P, \{q_1, \dots, q_k\})$ eine affine Hyperebene, die die Punkte P und $P + T$ enthält.

Dann gilt für $x \in E^k \subset \mathbb{R}^N$:

$$x \in M(P, T, \Theta) \Leftrightarrow x \in M_{E^k}(P, T, \Theta).$$

Die Situation $N = 2$ ist also charakteristisch, da die Punkte x, P und $P + T$ immer in einer Ebene liegen.

- (ii) Seien die Punkte $P, P_1, P_2 \in \mathbb{R}^N$ und der Richtungsvektor $T \in \mathbb{S}^{N-1}$ gegeben. Für $2 \leq k < N$ sei $E^k := E^k(P, \{q_1, \dots, q_k\})$ eine affine Hyperebene, die P, P_1 und P_2 enthält und $p : \mathbb{R}^N \rightarrow (E^k - P)$ die Projektion auf $(E^k - P)$. Setze $T' := p(T)/|p(T)| \in \mathbb{S}_{E^k}^{k-1}$ (für $p(T) \neq 0$, sonst $T' \in \mathbb{S}_{E^k}^{k-1}$ beliebig).

Dann gilt für $x \in E^k \subset \mathbb{R}^N$:

$$x \in M_{E^k}(P, T', \Theta) \Rightarrow x \in M(P, T, \Theta)$$

bzw. die Umkehrung

$$x \notin M_{E^k}(P, T', \Theta) \Leftarrow x \notin M(P, T, \Theta).$$

Beweis:

- (i) Durch eine Translation um den Vektor $-P$ können wir die Situation in den Nullpunkt verschieben. Sei also oBdA $P = 0$.

Zunächst der Beweis von rechts nach links. Sei $x \in M_{E^k}(P, T, \Theta)$, dann existiert ein $c \in C_{E^k}(P, T, \Theta)$ mit $|x - c| < \Theta$. Die Menge $C_{E^k}(P, T, \Theta)$ ist jedoch auch Untermenge von $C(P, T, \Theta)$, genauer

$$\begin{aligned} C_{E^k}(P, T, \Theta) &= \\ \{\Theta v + P \mid v \in \mathbb{S}_{E^k}^{k-1} \text{ und } v \perp T\} &\subset \{\Theta v + P \mid v \in \mathbb{S}^{N-1} \text{ und } v \perp T\} \\ &= C(P, T, \Theta), \end{aligned}$$

denn $\mathbb{S}_{E^k} \subset \mathbb{S}^{N-1}$. Also gilt auch $c \in C(P, T, \Theta)$ und damit $x \in M(P, T, \Theta)$.

Für die Richtung links nach rechts beweisen wir die negierte Aussage.

Sei $x \in E^k$, aber $x \notin M_{E^k}(P, T, \Theta)$. Wir müssen $x \notin M(P, T, \Theta)$ zeigen. Sei $q_1, \dots, q_k$ eine Orthonormalbasis von E^k mit $q_1 = T$, die wir durch $\{q_{k+1}, \dots, q_N\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^N$ ergänzen. Seien μ_i die Koordinaten von x , so dass $x = \sum_{i=1}^k \mu_i q_i$ gilt und für $c \in C_{E^k}(P, T, \Theta)$ seien λ_i die Koordinaten von c mit $c = \sum_{i=2}^k \lambda_i q_i$. Der Koeffizient λ_1 beträgt 0,

da c orthogonal zu $T = q_1$ ist. Da $c \in E_k$ genau dann in $C_{E^k}(P, T, \Theta)$ liegt, wenn $|c|^2 = \Theta^2$ und $c \perp T, T = q_1$ gilt, folgt

$$c \in C_{E^k}(P, T, \Theta) \Leftrightarrow \sum_{i=2}^k \lambda_i^2 = \Theta^2 \ \& \ \lambda_i = 0 \text{ für } i = 1 \text{ und } i > k. \quad (5)$$

Aus $x \notin M_{E^k}(P, T, \Theta)$ ergibt sich

$$|x - c|^2 \geq \Theta^2 \quad \forall c \in C_{E^k}$$

bzw. in Koordinaten

$$\mu_1^2 + \sum_{i=2}^k (\mu_i - \lambda_i)^2 = \mu_1^2 + \sum_{i=2}^k (\mu_i^2 - 2\lambda_i \mu_i) + \sum_{i=2}^k \lambda_i^2 \geq \Theta^2.$$

Mit Gleichung (5) folgt (beachte, dass die vorige Ungleichung unabhängig von den Vorzeichen von λ_i gilt)

$$\mu_1^2 + \sum_{i=2}^k (\mu_i^2 - 2\lambda_i \mu_i) \geq \mu_1^2 + \sum_{i=2}^k (\mu_i^2 - 2|\lambda_i||\mu_i|) \geq 0. \quad (6)$$

Sei nun $c' \in C(P, T, \Theta)$ beliebig mit Koordinaten λ'_i . Wir setzen $c^* \in C_{E^k}(P, T, \Theta)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_i^* &:= \lambda'_i \quad (2 \leq i \leq k-1) \\ \lambda_k^* &:= \sqrt{\Theta^2 - \sum_{i=2}^{k-1} \lambda_i'^2} \\ c^* &:= \sum_{i=2}^k \lambda_i^* q_i. \end{aligned}$$

Da die λ_i^* auch Gleichung (5) erfüllen, ist c^* in $C_{E^k}(P, T, \Theta)$. Nach Konstruktion gilt

$$|\lambda'_i| \leq |\lambda_i^*| \quad \text{für } i = 1, \dots, k. \quad (7)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mu_1^2 + \sum_{i=2}^k (\mu_i^2 - 2\lambda'_i \mu_i) &\geq \mu_1^2 + \sum_{i=2}^k (\mu_i^2 - 2|\lambda'_i||\mu_i|) \\ &\stackrel{(7)}{\geq} \mu_1^2 + \sum_{i=2}^k (\mu_i^2 - 2|\lambda_i^*||\mu_i|) \\ &\stackrel{(6)}{\geq} 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
 |x - c'|^2 &= \mu_1 + \sum_{i=2}^{i=k} (\mu_i - \lambda'_i)^2 + \sum_{i=k+1}^N \lambda_i'^2 \\
 &= \underbrace{\mu_1 + \sum_{i=2}^{i=k} (\mu_i^2 - 2\lambda'_i \mu_i)}_{\geq 0 \text{ (8)}} + \underbrace{\sum_{i=2}^N \lambda_i'^2}_{=\Theta^2 \text{ (wie (5))}} \geq \Theta^2. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Da $c' \in C(P, T, \Theta)$ beliebig war, folgt $x \notin M(P, T, \Theta)$, was zu zeigen war.

- (ii) Wieder verschieben wir zunächst die ganze Situation um $-P$ in den Nullpunkt. Sei $\{q_1, \dots, q_k\}$ eine Orthogonalbasis von E^k mit $q_2, \dots, q_k \perp T$. Wir ergänzen sie zu einer Orthogonalbasis $q_1, \dots, q_N$ des ganzen $\mathbb{R}^N$, so dass der Richtungsvektor T in der von q_1 und q_{k+1} aufgespannten Ebene liegt.

Wir zeigen zunächst $C_{E^k}(0, T', \Theta) \subset C(0, T, \Theta)$. Dazu reicht es zu zeigen, dass alle $v \in C_{E^k}(P, T', \Theta)$ orthogonal auf T stehen und $|v| = \Theta$ gilt. Letzteres ist offensichtlich. Wenn T orthogonal zu E^k steht, so ist nichts zu zeigen, denn es ist insbesondere orthogonal zu $v \in C_{E^k}(0, T', \Theta) \subset E^k$. Sei also T ungleich $\pm q_{k+1}$, dann ist $T' = p(T)/|p(T)|$ parallel zu q_1 . Alle $v \in E^k(0, T', \Theta)$ sind orthogonal zu T' also auch zu q_1 und damit zu $T \in \text{span}(q_1, q_{k+1})$.

Aus $x \in M_{E^k}(0, T', \Theta)$ folgt, dass ein $c \in C_{E^k}(0, T', \Theta)$ existiert mit $|c - x| < \Theta$. Dieses c ist nach obiger Überlegung auch in $C(P, T, \Theta)$ enthalten und damit folgt $x \in M(P, T, \Theta)$, was zu zeigen war.

□

Selbst wenn wir die Situation mit dem vorigen Lemma auf den zweidimensionalen Fall zurückführen, ist es oft nicht angenehm mit obigem Torus zu rechnen. Deshalb führen wir noch ein weiteres Objekt, die Trichter-Kugel ein. Es ist eine offene Kugel ohne einen Doppelkegel in ihrem Zentrum.

Definition 1.8 (Trichter-Kugel). Für $P \in \mathbb{R}^N, T \in \mathbb{S}^{N-1}, \alpha \in (0, \pi/2)$ heißt der Ball um P ohne den Doppelkegel entlang T mit Öffnungswinkel α

$$K_\Theta(P, T, \alpha) := \{y \in B_r(P) \mid \angle(y - P, T) > \alpha \text{ und } y \neq p\} \text{ mit } r := 2\Theta \sin \alpha$$

Trichter-Kugel. Die doppelkegelförmige Menge $B_r(P) \setminus K_\Theta(P, T, \alpha)$ mit Öffnungswinkel α nennen wir **Trichter**.

Konvention 1.9 (zur Notation). Der Winkel $\angle(T_0, T_1)$ bezeichnet in dieser Arbeit den Winkel zwischen den Geraden $\mathbb{R}T_0$ und $\mathbb{R}T_1$. Er liegt also immer zwischen 0 und $\pi/2$.

Der Radius r der Trichter-Kugel ist gerade so gewählt, dass sie in dem entsprechenden Torus liegt. Umgekehrt ist die Vereinigung aller Trichter-Kugeln gerade der entsprechende Torus:

Lemma 1.10 (Ausschöpfung des Torus durch Trichter-Kugeln). Sei $P \in \mathbb{R}^N$, $T \in \mathbb{S}^{N-1}$ und $\Theta > 0$ gegeben.

Dann gilt

$$\bigcup_{\alpha \in (0, \pi/2)} K_\Theta(P, T, \alpha) = M(P, T, \Theta)$$

Inbesondere folgt aus $x \in \mathbb{R}^N$, $x \notin M(P, T, \Theta)$

$$x \notin K_\Theta(P, T, \alpha) \quad \forall \alpha \in (0, \pi/2).$$

Beweis: Um zu prüfen, ob ein Punkt $x \in \mathbb{R}^N$ in einer der beiden obigen Mengen liegt, reicht es, sich auf die durch x, P und T aufgespannte Ebene zu beschränken, also nur den Fall $N = 2$ zu betrachten. Sei $E^2 := E^2(P, \{P - x, T\})$, die von P, T und x aufgespannte Ebene sofern $x - P$ und T nicht parallel sind. Andernfalls sei $E^2 := E^2(P, \{T, T'\})$, wobei $T' \in \mathbb{S}^{N-1}$ beliebig, aber nicht parallel zu T ist. Wegen Lemma 1.7 wissen wir, dass der Schnitt von $M(P, T, \Theta)$ mit E^2 gerade $M_{E^2}(P, T, \Theta)$ ist. Der Schnitt von E^2 mit der Trichter-Kugel $K_\Theta(P, T, \alpha)$ ist die Menge

$$\begin{aligned} E^2 \cap K_\Theta(P, T, \alpha) &= \{y \in B_r(P) \cap E^2 \mid \angle(P - y, T) > \alpha \text{ und } y \neq P\} \\ &\quad (\text{mit } r = 2\Theta \sin \alpha) \end{aligned}$$

also gerade die Trichter-Kugel im Zwei-Dimensionalen. Zusammenfassend erhalten wir wegen $x \in E^2$

$$\begin{aligned} x \in K_\Theta(P, T, \alpha) &\Leftrightarrow x \in K_\Theta(P, T, \alpha) \cap E^2 \\ x \in M(P, T, \Theta) &\Leftrightarrow x \in M_{E^2}(P, T, \Theta). \end{aligned}$$

Also reicht es, nur die zweidimensionale Situation zu untersuchen.

Sei nun $N = 2$. Die Inklusion „ $\subset$ “ ist wegen der Wahl von r offensichtlich (siehe Abbildung 1). Wir zeigen also „ $\supset$ “. Sei $x \in M(P, T, \Theta)$. Wir müssen den Öffnungswinkel α der Trichter-Kugel so wählen, dass $\alpha < \angle(T, x - P)$ gilt und gleichzeitig für den Radius $r(\alpha)$ die Ungleichung $|x - P| < r$ gilt. Dann gilt nämlich $x \in K_\Theta(P, T, \alpha)$. Sei $h := |x - P - \langle x - P, T \rangle T|$ der zu T orthogonale Anteil von $(x - P)$. Da $M(P, T, \Theta)$ offen ist, gilt

$$0 < h < 2\Theta. \tag{10}$$

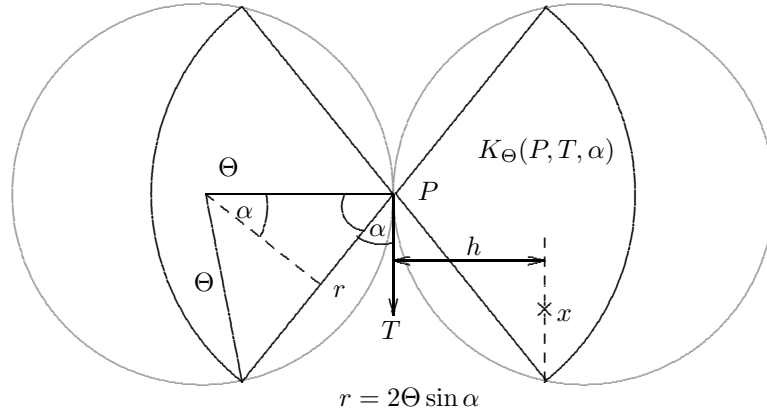


Abbildung 1: Ausschöpfung des Torus mit Trichter-Kugeln.

Wir wählen α so, dass

$$\frac{h}{r} = \frac{h}{2\Theta \sin \alpha} = \sin \alpha$$

gilt und verwenden $r = 2\Theta \sin \alpha$, um nach α aufzulösen:

$$\alpha := \arcsin \sqrt{\frac{h}{2\Theta}}$$

Wegen (10) folgt $0 < \alpha < \pi/2$. Der Punkt x liegt also in $K_\Theta(P, T, \alpha)$ (siehe Abbildung 1), was zu zeigen war. $\square$

Wenn ein Punkt also nicht in einem Torus liegt, so kann er auch in keiner der entsprechenden Trichter-Kugeln liegen.

In Abschnitt 2 werden wir Kurven betrachten, deren Bilder die Torus-Eigenschaft haben. Es wird sich zeigen, dass ein Zusammenhang zwischen dem Richtungsvektor des Torus in einem Punkt und der Ableitung der Kurve besteht (vgl. Lemma 2.5). Aus diesem Grund ist das folgende Lemma interessant, weil es zeigt, dass der Torus in nicht isolierten Punkten nur auf eine Art ausgerichtet sein kann.

Lemma 1.11 (Torus-Eigenschaft in nicht isolierten Punkten). *Sei $P \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein nicht isolierter Punkt (d.h. $B_r(P) \setminus \{P\} \cap \Omega \neq \emptyset \forall r > 0$) und Ω habe in P die Torus-Eigenschaft bzgl. $\Theta > 0$. Dann ist der Richtungsvektor T mit $M(P, T, \Theta) \cap \Omega = \emptyset$ eindeutig bis auf Vorzeichen bestimmt und T ist unabhängig von Θ .*

Beweis: Angenommen T_0 und T_1 seien zwei nicht parallele Richtungsvektoren zu $\Theta_0 > 0$ und $\Theta_1 > 0$, so dass weder $M(P, T_0, \Theta_0)$ noch

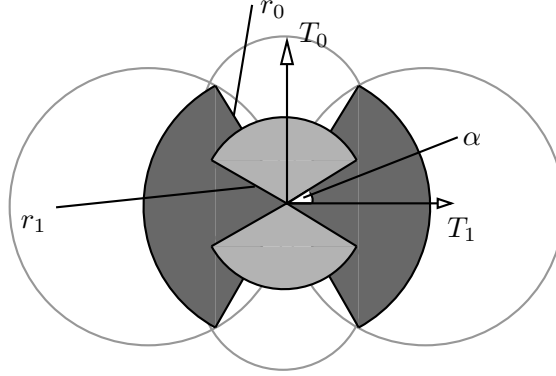


Abbildung 2: Der Torus ist in nicht isolierten Punkten eindeutig.

$M(P, T_1, \Theta_1)$ die Menge Ω schneiden. Setze $\alpha =: \angle(T_0, T_1)/3 \in (0, \pi/6)$ und $r_i := 2\Theta_i \sin \alpha$ ($i = 0, 1$). Wir approximieren die beiden Tori mit jeweils einer Trichter-Kugel mit Öffnungswinkel α und Radius r_i . Diese überlappen nach Wahl von α gerade so, dass sie den ganzen punktierten Ball $B_r(P) \setminus \{P\}$ mit Radius $r := \min(r_0, r_1)$ enthalten (vgl. Abbildung 2):

$$K_{\Theta_0}(P, T_0, \alpha) \cup K_{\Theta_1}(P, T_1, \alpha) \supset B_r(P) \setminus \{P\}.$$

Da Ω die Tori und damit die Trichter-Kugeln nicht schneidet, schneidet es auch ganz $B_r(P) \setminus \{P\}$ nicht. Dies steht im Widerspruch dazu, dass P kein isolierter Punkt von Ω ist. Also ist T eindeutig bis auf das Vorzeichen bestimmt und unabhängig von Θ . $\square$

Die Ausrichtung des Torus in einem Punkt hängt aber auch von dem Verlauf der Menge ab. Liegen zwei Punkte $P_0, P_1 \in \Omega$ nahe zusammen, so sind auch die Tori in P_0 und P_1 ähnlich ausgerichtet, d.h. der Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren ist klein, denn sonst würde der Punkt P_0 im Torus um P_1 liegen und umgekehrt.

Lemma 1.12 (Kippverhalten des Torus in benachbarten Punkten).

Die Menge Ω habe in $P_0, P_1 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ die Torus-Eigenschaft bzgl. $\Theta > 0$. Seien $T_0, T_1 \in \mathbb{S}^{N-1}$ die zu $M(P_0, T_0, \Theta)$ bzw. $M(P_1, T_1, \Theta)$ gehörenden Richtungsvektoren.

Dann gilt

$$\sin \frac{\angle(T_0, T_1)}{2} \leq \frac{|P_1 - P_0|}{2\Theta} \quad (11)$$

sowie

$$\angle(T_0, T_1) \leq \pi \frac{|P_1 - P_0|}{2\Theta}. \quad (12)$$

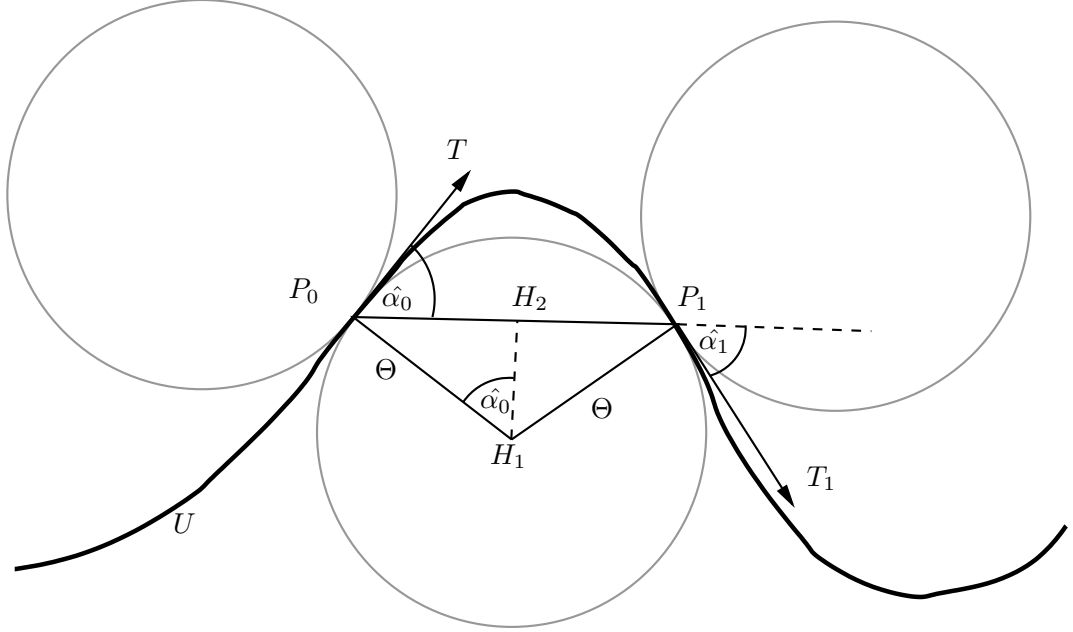


Abbildung 3: Kippverhalten des Torus.

Beweis: Sei $0 < |P_0 - P_1| < 2\Theta$ sonst ist nichts zu zeigen. Wir betrachten den Winkel $\alpha_0 := \angle(T_0, P_1 - P_0) \in [0, \pi/2]$. Wie groß kann dieser in Abhängigkeit von T_0 schlimmstenfalls werden, ohne dass die Torus-Eigenschaft von Ω verletzt wird? Wir bestimmen also

$$\hat{\alpha}_0 := \max_{\substack{T \in \mathbb{S}^{N-1} \\ P_1 \notin M(P_0, T, \Theta)}} \angle(T, P_1 - P_0).$$

Das Maximum wird angenommen, weil $\mathbb{S}^{N-1}$ kompakt ist und die Nebenbedingung $P_1 \notin M(P_0, T, \Theta)$ abgeschlossen ist. Außerdem ist $T = (P_1 - P_0)/|P_1 - P_0|$ ein zulässiger Kandidat.

Der Winkel $\hat{\alpha}_0$ wird genau dann maximal, wenn $T \in \mathbb{S}^{N-1}$ so gewählt ist, dass $P_1 \in \partial M(P_0, T, \Theta)$ gilt. Denn wäre P_1 im Inneren von $\mathbb{R}^N \setminus M(P, T, \Theta)$, so könnte man ein T mit einem etwas größeren Winkel zu $(P_1 - P_0)$ finden, welches auch noch zulässig ist. P_1 kann den Rand von $M(P_0, T, \Theta)$ aber nur auf der Menge $\partial M(P_0, T, \Theta) \cap \partial B_{|P_1 - P_0|}(P_0)$ berühren. Für alle T , die die Bedingung

$$P_1 \in \partial M(P_0, T, \Theta) \cap \partial B_{|P_1 - P_0|}(P_0)$$

erfüllen, gilt

$$\sin \angle(T, P_1 - P_0) \equiv \frac{|P_1 - P_0|}{2\Theta}.$$

Um das einzusehen, beschränken wir uns mit Lemma 1.7 auf die Ebene $E^2(P_0, \{P_0, P_0 + T, P_1\})$ und betrachten in Abbildung 3 das Dreieck $\Delta(P_0 H_1 H_2)$.

Also gilt auch $\sin \hat{\alpha}_0 = \frac{|P_1 - P_0|}{2\Theta}$. Daraus folgern wir wegen $\alpha_0 \leq \hat{\alpha}_0$ und der Monotonie des Sinus

$$\sin \alpha_0 \leq \sin \hat{\alpha}_0 = \frac{|P_1 - P_0|}{2\Theta}. \quad (13)$$

Die gleiche Abschätzung erhalten wir auch für $\alpha_1 := \angle(T_1, P_1 - P_0)$ und entsprechend definiertes

$$\hat{\alpha}_1 := \max_{\substack{T \in \mathbb{S}^{N-1} \\ P_0 \notin M(P_1, T, \Theta)}} \angle(T, P_1 - P_0).$$

Insbesondere gilt $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_0$. Nun schätzen wir den Winkel $\angle(T_0, T_1)$ mit der Dreiecksungleichung ab

$$\angle(T_0, T_1) \leq \alpha_0 + \alpha_1 \leq \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 = 2\hat{\alpha}_0.$$

Durch Auflösen nach $\hat{\alpha}_0$ und Einsetzen in (13) erhalten wir Gleichung (11)

$$\sin \frac{\angle(T_0, T_1)}{2} \leq \frac{|P_1 - P_0|}{2\Theta}.$$

Schätzen wir den Sinus mittels $\sin(x) \leq (2/\pi)x$ für $0 \leq x \leq \pi/2$ nach unten ab, so erhalten wir auch Gleichung (12). $\square$

Sei $\{P_i\}_i \subset \Omega$ nun eine konvergente Folge mit $P_i \rightarrow P \in \Omega$ und Ω habe die Torus-Eigenschaft zu festem $\Theta > 0$ in P_i . Wenn man die Richtungsvektoren T_i in den Punkten P_i betrachtet, so kann man mit dem obigen Lemma zeigen, dass sie (bis auf Vorzeichen) gegen einen Grenzwert T konvergieren, denn die Winkel $\angle(T_i, T_j) \leq \pi \frac{|P_i - P_j|}{2\Theta}$ bilden eine Cauchyfolge. Man hofft nun zu recht, dass Ω die Torus-Eigenschaft auch in P mit Richtungsvektor T hat, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 1.13 (Stetigkeit der Torus-Eigenschaft). *Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ habe zu festem $\Theta > 0$ die Torus-Eigenschaft in einer Folge von Punkten $\{P_i\}_i \subset \Omega$ mit $P_i \rightarrow P \in \Omega$.*

Dann hat Ω in P die Torus-Eigenschaft zu Θ .

Beweis: Seien $T_i \in \mathbb{S}^{N-1}$ die Richtungsvektoren in den Punkten P_i . Da $\mathbb{S}^{N-1}$ kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von ihnen gegen ein $T \in \mathbb{S}^{N-1}$. OBdA sei $\{T_i\}_i$ schon konvergent. Der Grenzvektor T sei auch verschieden von $-e_1$, sonst drehen wir die ganze Situation etwas, so dass $T \neq -e_1$. Für i groß genug gilt dann auch $T_i \neq -e_1$. Wir gehen im folgenden schon davon aus, dass i groß genug ist.

Angenommen der Torus um P entlang T mit Radius Θ schneide Ω im Punkt $x^* \in \Omega$, also

$$x^* \in M(P, T, \Theta) \cap \Omega \neq \emptyset.$$

Sei x das Urbild des Punktes x^* in der Parametrisierung $m_\Theta : \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1} \times M(0, e_1, \Theta) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ (vgl. Definition 1.2), also $m_\Theta(P, T, x) = x^*$. Da $M(P, T, \Theta)$ offen ist, existiert für $\epsilon > 0$ genügend klein ein ganzer Ball $B_\epsilon(x^*) \subset M(P, T, \Theta)$, und da m_Θ eine Isometrie ist, gilt entsprechend $B_\epsilon(m_\Theta(P_i, T_i, x)) \subset M(P_i, T_i, \Theta)$. Da m_Θ stetig ist, gilt

$$m_\Theta(P_i, T_i, x) \rightarrow m_\Theta(P, T, x) = x^* \text{ für } i \rightarrow \infty.$$

Also existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $|m_\Theta(P_k, T_k, x) - x^*| < \epsilon$. Damit folgt aber $x^* \in B_\epsilon(m_\Theta(P_k, T_k, x)) \subset M(P_k, T_k, \Theta)$ im Widerspruch dazu, dass Ω in dem Punkt P_k die Torus-Eigenschaft hat, also insbesondere im Widerspruch zu

$$M(P_k, T_k, \Theta) \cap \Omega = \emptyset$$

gilt. Es muss also gelten

$$M(P, T, \Theta) \cap \Omega = \emptyset$$

und Ω hat auch im Punkt P die Torus-Eigenschaft. □

Um die Aussage des folgenden Lemmas zu verstehen, stellen wir uns vor, auf der Menge Ω , die die Torus-Eigenschaft habe, zu fahren. Im Punkt P sei ein Torus angebracht. Nähern wir uns nun dem Punkt P , so fahren wir in den Trichter des Torus ein. Das folgende Lemma besagt, dass es (für beide Seiten des Trichters) nur eine Möglichkeit gibt auf Ω in den Trichter einzufahren. Eine Situation wie in Abbildung 5f auf Seite 17, wir fahren herein, drehen um und fahren auf einer anderen Spur wieder heraus, kann also nicht vorkommen.

Lemma 1.14 (Einsame Einfahrt). *Die Menge Ω habe die Torus-Eigenschaft zu festem $\Theta > 0$. Sei $P \in \Omega$ und $M(P, T, \Theta)$ der entsprechende Torus. Setze*

$$D_t := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < \Theta \text{ und } T \perp x\} + P + tT.$$

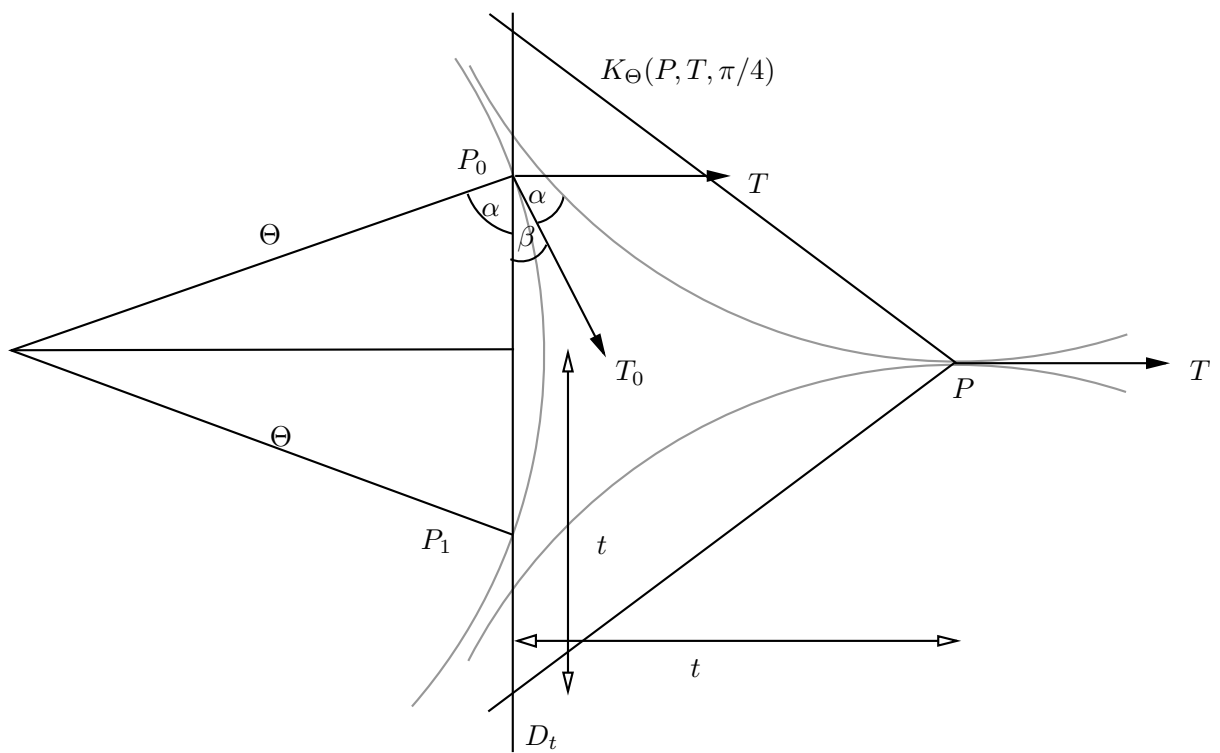


Abbildung 4: Zu Lemma 1.14 (Einsame Einfahrt).

Dann gilt:

$$\#(D_t \cap \Omega) \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}, |t| < \frac{\Theta}{3}.$$

Beweis: Sei $t \in \mathbb{R}, |t| < \frac{\Theta}{3} < \frac{\Theta}{2}$. Wir zeigen

$$D_t \cap \Omega = \text{maximal ein Punkt.}$$

Angenommen, es gäbe zwei Schnittpunkte P_0 und P_1 . Seien T_0, T_1 und T die entsprechenden Richtungsvektoren der Tori in P_0, P_1 und P . Wieder können wir unsere Betrachtungen auf das Zwei-Dimensionale beschränken, indem wir Lemma 1.7 (ii) mit $E^2 := E^2(P, \{P - P_0, P - P_1\})$ anwenden. Es kann nicht vorkommen, dass einer der Richtungsvektoren senkrecht zu E^2 steht, da sonst der Schnitt des zugehörigen Torus mit der Ebene E^2 eine punktierte Kreisscheibe mit Radius 2Θ wäre, in der sich die anderen zwei Punkte befänden und damit auch im Torus um den dritten Punkt befänden. Die Menge Ω hätte also nicht die Torus-Eigenschaft.

Je näher sich die Punkte P_0 und P_1 sind, desto kleiner muss der Winkel

$$\beta := \angle(T_0, P_0 - P_1) = \pi/2 - \alpha$$

mit $\alpha := \angle(T_0, T) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sein. Wie in Lemma 1.12, Gleichung (13) gilt:

$$\cos \alpha = \sin \beta \leq \frac{|P_1 - P_0|}{2\Theta}. \quad (14)$$

Den Abstand $|P_0 - P_1|$ zwischen P_0 und P_1 können wir wie folgt abschätzen. Approximieren wir den Torus $M(P, T, \Theta)$ durch die Trichter-Kugel $K_\Theta(P, T, \pi/4)$, so sehen wir, dass sich die Punkte P_0, P_1 in $B_r(P) \setminus K_\Theta(P, T, \pi/4)$ befinden und diese Menge ist auf der Scheibe D_t nur $2|t|$ breit (mit $r = 2\Theta \sin(\pi/4) = \sqrt{2}\Theta$). Wir erhalten also

$$|P_0 - P_1| \leq 2|t| < \Theta.$$

Aus Gleichung (14) und da der Arcus Cosinus monoton fallend ist, folgt

$$\alpha \geq \arccos \frac{|P_0 - P_1|}{2\Theta} > \arccos \frac{\Theta}{2\Theta} = \frac{\pi}{3}.$$

Andererseits wissen wir über das Kippverhalten des Torus aus Lemma 1.12, dass der Winkel α kleiner sein muss, je näher sich P und P_0 sind. Es gilt (siehe Abbildung 4):

$$|P - P_0| \leq 2|t| < \frac{2\Theta}{3}.$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen $|t| < \Theta/3$. Damit folgt zusammen mit Lemma 1.12 (Kippverhalten):

$$\alpha \stackrel{(12)}{\leq} \frac{\pi|P - P_0|}{2\Theta} < \frac{\pi}{3}.$$

Insgesamt also

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3},$$

was ein Widerspruch ist. Also kann es nur einen Schnittpunkt geben. $\square$

2 Die Torus-Eigenschaft einer Kurve

In diesem Abschnitt führen wir die Torus-Eigenschaft einer Kurve ein. Eine Kurve hat die Torus-Eigenschaft, wenn man um jeden ihrer Punkte einen offenen Torus legen kann, so dass die Kurve den Torus nicht schneidet.

Wir betrachten stetige Kurven im euklidischen Raum, die entweder auf einem abgeschlossenen Intervall oder einer Kreislinie der entsprechenden Länge definiert sind, je nachdem, ob es sich um offene oder geschlossene Kurven handelt. In den meisten Beweisen spielt dies ohnehin keine Rolle. Wir unterscheiden ggf. zwischen Randparametern (des Intervalls) und inneren Parametern, wozu auch alle Parameter der Kreislinie gehören. Wir nehmen an, dass die Kurven auf dem Intervall $[0, L]$ bzw. auf der Kreislinie mit Länge L definiert sind. Dabei muss L zunächst nicht die Länge der Kurven sein.

Definition 2.1. *Bezeichne $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ im Folgenden stets eine stetige Kurve. Dabei ist I definiert als*

$$I := \begin{cases} [0, L] & \text{falls } \gamma \text{ eine offene Kurve ist.} \\ \mathbb{S}_L & \text{falls } \gamma \text{ eine geschlossene Kurve ist.} \end{cases}$$

Dabei sei $\mathbb{S}_L := \frac{L}{2\pi}\mathbb{S}^1 := \{\frac{L}{2\pi}x \mid x \in \mathbb{S}^1\}$ eine Kreislinie mit Umfang L . Sei γ nicht entartet, also $L > 0$ bzw. $|I| > 0$.

Wenn nötig fordern wir von der Kurve, dass sie Lipschitz-stetig ist. Die Kurve ist dann fast überall differenzierbar, d.h. dass die nicht differenzierbaren Parameter eine Nullmenge bilden.

In Abschnitt 3 werden wir auch nach Bogenlänge parametrisierte Kurven betrachten. Diese sind dann Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1. Wir werden bereits in diesem Abschnitt einige Bemerkungen zu diesen besonders schönen Kurven machen. Zur besseren Unterscheidung schreiben wir Γ statt γ , wenn die Kurve nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Wir benötigen einen Begriff von Abstand von Parametern im Urbild der Kurve. Ist sie auf einem Intervall definiert, so kann man direkt die Differenz der beiden Urbilder in $\mathbb{R}$ nehmen. Auf dem Kreis muss man den kürzeren der beiden möglichen Verbindungswege als Abstand wählen. Beides leistet die folgende Definition.

Definition 2.2 (Abstand im Urbild). Für $s, t \in I$ sei der Abstand $D(s, t) \in \mathbb{R}$ von s und t im Urbild der Kurve definiert als

$$D(s, t) := \begin{cases} |s - t| & \text{falls } I \text{ ein Intervall ist.} \\ \frac{L}{2\pi} \alpha & \text{falls } I \text{ eine Kreislinie ist.} \end{cases}$$

Dabei ist $\alpha \in [0, \pi]$ der kleinere Winkel zwischen s und t .

Wenn wir uns nur für ein lokales Phänomen der Kurve interessieren, kommt es vor, dass wir eine monotone Folge von Parametern betrachten. Im Fall $I = \mathbb{S}_L$ müssen wir definieren, was wir z.B. mit $s < t$, $s, t \in \mathbb{S}_L$ meinen. Liegen s und t nahe genug beieinander ($D(s, t) \ll 1$), so können wir die Kreislinie mit der Abbildung

$$\begin{aligned} S_L: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}_L \\ t &\longmapsto (r \sin(t/r), r \cos(t/r)) \\ \text{mit } r &:= \frac{L}{2\pi} \end{aligned}$$

(in Einheitsgeschwindigkeit) parametrisieren. Mit $s < t$ meinen wir nun für $s, t \in \mathbb{S}_L$, dass wir eine ausreichend große offene Umgebung von s mit S_L auf $\mathbb{R}$ zurückziehen und für die Urbilder $s' := S_L^{-1}(s), t' := S_L^{-1}(t) \in \mathbb{R}$ gilt $s' < t'$. Ebenso definieren wir für $s \in \mathbb{S}_L, r \in \mathbb{R}$ mit r klein genug $s + r := S_L(s' + r)$.

Definition 2.3 (Torus-Eigenschaft für Kurven). Eine stetige Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ hat die **Torus-Eigenschaft im Parameter** $s \in I$ zu $\Theta > 0$, falls $\gamma(I)$ in $\gamma(s)$ die Torus-Eigenschaft hat. Also genau dann, wenn ein $T \in \mathbb{S}^{N-1}$ existiert, so dass

$$M(\gamma(s), T, \Theta) \cap \gamma(I) = \emptyset.$$

Die Kurve hat die **Torus-Eigenschaft bezüglich** $\Theta > 0$, wenn $\gamma(I)$ die Torus-Eigenschaft bezüglich Θ hat. Also genau dann, wenn sie für alle ihre Parameter zu festem $\Theta > 0$ die Torus-Eigenschaft hat. Wir sagen dann kurz: „ γ hat die Torus-Eigenschaft“.

Abbildung 5 zeigt einige charakteristische Beispiele und Gegenbeispiele für Kurven im $\mathbb{R}^2$ mit der Torus-Eigenschaft. In den Beispielen a, b, c und d sei Γ zweimal stetig differenzierbar. Die Torus-Eigenschaft hat sowohl lokal als

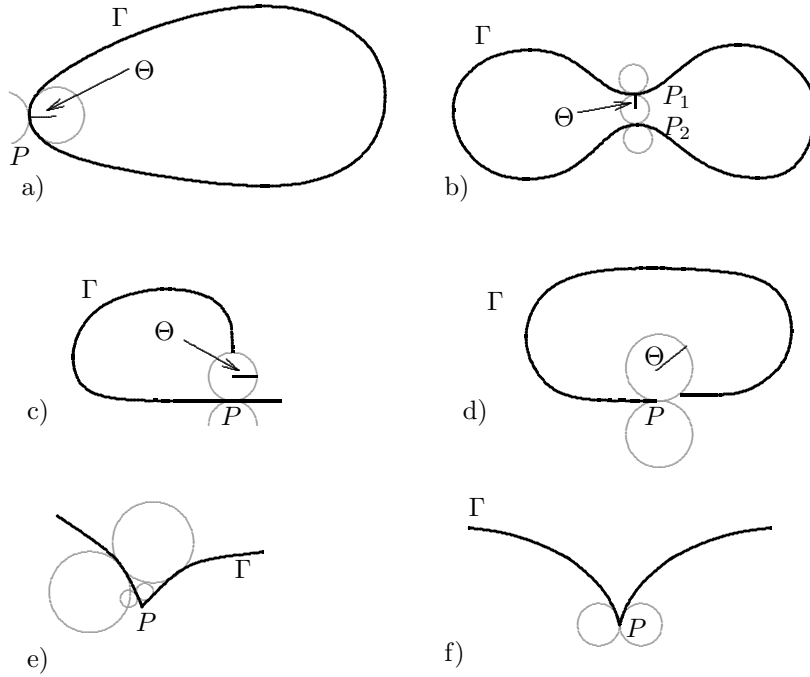


Abbildung 5: Beispiele und Gegenbeispiele zur Torus-Eigenschaft. In a, b, c und d ist jeweils der größtmögliche Radius Θ im interessanten Punkt P bzw. P_1 und P_2 eingezeichnet, zu dem die Kurve noch die Torus-Eigenschaft hat. In a wird er durch die lokale Krümmung begrenzt. In b kommt die Kurve sich selbst sehr nahe. In d sieht man, dass die Endpunkte einer offenen Kurve sich trotz großem Θ sehr nahe kommen können. Die Kurven in e und f haben nicht die Torus-Eigenschaft, denn der Radius der Tori geht gegen 0, wenn man sich P nähert. In f läßt sich um den Punkt P selbst jedoch wieder ein Torus mit positivem Radius legen (die Tangente der Kurve springt in P nicht).

auch global Auswirkungen darauf, wie die Kurve Γ aussehen kann (vergleiche dazu auch [GM99]). Beispiel 5a zeigt, dass Θ^{-1} die lokale Krümmung im Punkt P beschränkt. Der Radius Θ ist gerade der Radius des Schmiegekreises in P . In Abbildung 5b kann man sehen, dass auch der Abstand zu auf der Kurve weit entfernten, im Bild aber nahen Punkten durch Θ nach unten beschränkt ist.

Beides gilt im Wesentlichen auch für offene Kurven, wie Abbildung 5c verdeutlicht (vgl. dazu auch [GMS02] Remark 6.1). Besondere Vorsicht ist jedoch an den Endpunkten geboten: Wie in Abbildung 5d zu sehen ist, können sie sich beliebig nahe kommen, sofern sie sich in etwa auf einer Linie nähern (Lemma 1.14 beschreibt die Situation genauer).

Abbildung 5e stellt schließlich eine Kurve dar, die nur stückweise differenzierbar ist. Bewegt man sich nun auf den Knick zu, so sieht man, dass man den Radius des Torus immer kleiner wählen muss, damit er die Kurve nicht schneidet. Es gibt also kein festes $\Theta > 0$, so dass die Kurve Γ in jedem Parameter die Torus-Eigenschaft zu Θ hat. Wenn der Knick eine Spitze (*Cusp*) ist, kann es jedoch vorkommen, dass Γ im Knick selbst durchaus die Torus-Eigenschaft zu positivem Θ hat, wie in Abbildung 5f angedeutet ist. Stückweise glatte Kurven mit der Torus-Eigenschaft haben also keine Knicke wie in Abbildung 5e. Eine Kurve kann jedoch die Torus-Eigenschaft haben, obwohl sie nur eine stückweise glatte Parametrisierung besitzt: Wenn $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ die Torus-Eigenschaft hat, so auch $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(|t|)$ (vgl. auch Lemma 2.4), obwohl letztere nicht glatt ist. In Satz 2.14 beweisen wir, dass alle injektiven Lipschitz-stetigen Kurven mit der Torus-Eigenschaft einmal stetig differenzierbar sind.

Da die Torus-Eigenschaft nur vom Bild der Kurve abhängt, ist sie unabhängig von der Parametrisierung der Kurve. Offensichtlich gilt:

Lemma 2.4. *Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine Kurve mit der Torus-Eigenschaft bzgl. $\Theta > 0$. Sei $\tau : J \rightarrow I$ eine surjektive, stetige Funktion.*

Dann hat $\gamma \circ \tau : J \rightarrow \mathbb{R}^N$ auch die Torus-Eigenschaft bzgl. Θ . □

Wenn eine Kurve in einem Parameter $s \in I$ die Torus-Eigenschaft hat, so kann der Torus dort nicht beliebig ausgerichtet sein (es sei denn, die Kurve besteht nur aus einem einzigen Punkt), sondern seine Ausrichtung ist eindeutig bis auf Vorzeichen und stimmt mit der Tangente an die Kurve überein, sofern diese differenzierbar ist.

Lemma 2.5 (Ausrichtung des Torus). *Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ nicht konstant und habe die Torus-Eigenschaft bzgl. $\Theta > 0$ im Parameter $s \in I$, $P := \gamma(s) \in \mathbb{R}^N$, so gilt für den Richtungsvektor $T \in \mathbb{S}^{N-1}$ des Torus $M(P, T, \Theta)$:*

(i) T ist eindeutig bis auf Vorzeichen bestimmt und unabhängig von $\Theta > 0$.

(ii) Ist γ in s differenzierbar, so ist $\gamma'(s)$ parallel zu T .

Beweis:

- (i) Dies folgt direkt aus Lemma 1.11, da kein Punkt von $\gamma(I)$ isoliert ist, denn γ ist stetig und nicht konstant.
- (ii) Für den Fall $\gamma'(s) = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\gamma'(s) \neq 0$. Sei $\{s_i\}_i \subset I$ eine Folge mit $s_i \rightarrow s$ und $\gamma(s_i) \neq \gamma(s)$. Letzteres ist wegen $\gamma'(s) \neq 0$ möglich. Betrachte

$$\frac{\gamma(s) - \gamma(s_i)}{s - s_i} \rightarrow \gamma'(s) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Wir zeigen, dass der Winkel zwischen der linken Seite und T gegen 0 geht. Wähle i_0 so groß, dass $|\gamma(s_i) - P| < \Theta$ für $i > i_0$. Sei ab hier $i > i_0$. Definiere

$$\alpha_i := \arcsin \frac{|P - \gamma(s_i)|}{2\Theta} + \frac{1}{i} \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty$$

und

$$r_i := 2\Theta \sin \alpha_i,$$

dann folgt $\gamma(s_i) \in B_{r_i}(P) \setminus K_\Theta(P, T, \alpha_i)$ und damit für den Winkel zwischen $P - \gamma(s_i)$ und T :

$$\angle \left(\frac{\gamma(s) - \gamma(s_i)}{s - s_i}, T \right) \leq \alpha_i \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Also muss $\gamma'(s)$ parallel zu T sein.

□

Lemma 1.12 überträgt sich auf die Kurve. Ist die Kurve sogar nach Bogenlänge parametrisiert, so kontrollieren wir das Kippverhalten des Torus auch im Urbildbereich.

Lemma 2.6 (Kippverhalten des Torus in benachbarten Punkten der Kurve). Die Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ habe in $s_0, s_1 \in I$ die Torus-Eigenschaft bzgl. $\Theta > 0$. Seien $T_0, T_1 \in \mathbb{S}^{N-1}$ die zu $M(\gamma(s_0), T_0, \Theta)$ bzw. $M(\gamma(s_1), T_1, \Theta)$ gehörenden Richtungsvektoren.

Dann gilt

$$\sin \frac{\angle(T_0, T_1)}{2} \leq \frac{|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)|}{2\Theta} \tag{15}$$

$$\angle(T_0, T_1) \leq \pi \frac{|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)|}{2\Theta}. \tag{16}$$

2 DIE TORUS-EIGENSCHAFT EINER KURVE

Für $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ nach Bogenlänge parametrisiert gilt insbesondere

$$\begin{aligned} \sin \frac{\angle(T_0, T_1)}{2} &\leq \frac{|\Gamma(s_1) - \Gamma(s_0)|}{2\Theta} \leq \frac{D(s_0, s_1)}{2\Theta} \\ \angle(T_0, T_1) &\leq \pi \frac{|\Gamma(s_1) - \Gamma(s_0)|}{2\Theta} \leq \pi \frac{D(s_0, s_1)}{2\Theta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 1.12. Der Zusatz folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit der nach Bogenlänge parametrisierten Kurve. $\square$

Wie das vorige Lemma folgt auch das nächste direkt aus dem entsprechenden Lemma für Mengen.

Lemma 2.7 (Stetigkeit der Torus-Eigenschaft). *Die stetige Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ habe zu festem $\Theta > 0$ die Torus-Eigenschaft in einer Folge von Parametern $\{s_i\}_i \in I$ mit $s_i \rightarrow s \in I$.*

Dann hat γ in s die Torus-Eigenschaft zu Θ .

Beweis: Da γ stetig ist, gilt $P_i := \gamma(s_i) \rightarrow P := \gamma(s)$ und die Behauptung folgt aus Lemma 1.13. $\square$

Daraus ergibt sich sofort ein wichtiges Korollar mit Blickrichtung auf die gewünschte Differenzierbarkeit von Γ auf ganz I (Satz 2.14).

Korollar 2.8. *Hat die Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ die Torus-Eigenschaft zu festem Θ auf einer dichten Teilmenge $I' \subset I$, so hat γ die Torus-Eigenschaft auf ganz I .* $\square$

Aus Lemma 1.14 folgt direkt

Lemma 2.9 (Einsame Einfahrt für Kurven). *Die stetige Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ habe die Torus-Eigenschaft zu festem $\Theta > 0$. Sei $s \in I$ und $M(\gamma(s), T, \Theta)$ der entsprechende Torus. Setze*

$$D_t := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < \Theta \text{ und } T \perp x\} + \gamma(s) + tT.$$

Dann gilt:

$$D_t \cap \gamma(I) = \text{maximal ein Punkt} \quad \forall t \in \mathbb{R}, |t| < \frac{\Theta}{3}.$$

$\square$

Es ist jedoch zu bemerken, dass obiger Schnittpunkt von der Kurve γ mehrfach durchlaufen werden kann, da wir nichts über die Injektivität von γ vorausgesetzt haben.

Aus dem vorangegangenen Lemma folgt nun, dass eine injektive Kurve mit der Torus-Eigenschaft nicht beliebig schnell ihre Richtung wechseln kann. Wenn die Kurve im Parameter s die Torus-Eigenschaft mit Richtungsvektor T hat, so muss die Kurve noch eine ganze Weile ungefähr in Richtung T laufen. Für differenzierbare Parameter ist das folgende Lemma klar, aber es gilt auch für die (zunächst) nicht differenzierbaren Parameter.

Lemma 2.10 (Lokale Monotonie von injektiven Kurven mit Torus-Eigenschaft). *Die stetige Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ habe zu festem $\Theta > 0$ die Torus-Eigenschaft und sei injektiv. Sei $s \in I$ und sei T der Richtungsvektor des Torus im Punkt $\gamma(s)$.*

Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \epsilon, s + t \in I$ die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \langle \gamma(s+t) - \gamma(s), T \rangle \end{aligned}$$

strikt monoton ist.

Beweis: Der Beweis folgt aus Lemma 2.9 (Einsame Einfahrt). Wegen der Stetigkeit von γ gibt es ein $\epsilon > 0$ so klein, dass

$$|\gamma(s+t) - \gamma(s)| < \Theta/3 \quad \forall s+t \in I \text{ mit } |t| < \epsilon. \quad (18)$$

Angenommen f ist nicht strikt monoton, dann folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz von $t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 \neq t_1, |t_0|, |t_1| < \epsilon$ mit $f(t_0) = f(t_1)$. Setze $r := f(t_0) = f(t_1)$ und wegen (18) gilt $|r| < \Theta/3$. Das heißt aber, dass sowohl $\gamma(s+t_0)$ als auch $\gamma(s+t_1)$ in der Scheibe D_r (definiert wie in Lemma 2.9) liegen. Wegen Lemma 2.9 wissen wir, dass $\gamma(s+t_0) = \gamma(s+t_1)$ sein muss, denn es kann nur einen Schnittpunkt geben. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von γ .

Also ist f auf einer ϵ -Umgebung von s strikt monoton. $\square$

Bemerkung 2.11. *Ist $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so können wir $\epsilon := \Theta/3$ wählen. Ansonsten können wir wenigstens ein ϵ so klein finden, dass Lemma 2.10 mit diesem ϵ für alle Parameter aus I gilt. Denn I ist kompakt und daher ist γ gleichmäßig stetig und wir finden im Beweis von Lemma 2.10 in (18) ein ϵ , so dass (18) für alle $s \in I$ gilt.*

Das folgende Lemma besagt anschaulich, dass eine Kurve, die zweimal durch einen Punkt läuft, beim zweiten Durchlauf auf der Spur des ersten Durchlaufs bleiben muss.

2 DIE TORUS-EIGENSCHAFT EINER KURVE

Lemma 2.12. *Die stetige Kurve $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ habe die Torus-Eigenschaft zu festem $\Theta > 0$. Seien $s, t \in I, t \notin \partial I$ mit $s \neq t$, aber $\gamma(s) = \gamma(t)$.*

Dann existiert eine halbseitige Umgebung $H := [u, u + h] \subset I, |h| > 0$ ¹ für $u = s$ oder $u = t$, so dass gilt

$$\#\gamma^{-1}(\gamma(r)) \geq 2 \quad \forall r \in H. \quad (19)$$

Es ist also gleich eine ganze halbseitige Umgebung von s oder t Doppelpunkt.

Beweis: Wir können davon ausgehen, dass weder s noch t in einem echten Konstanzintervall $K \subset I$ (d.h. $|K| > 0, \forall r, r' \in K : \gamma(r) = \gamma(r')$) von γ liegt, denn läge beispielsweise s in K , so wählen wir $|h| > 0, H := [s, s + h] \subset K$. Das Intervall H erfüllte dann Ungleichung (19) und wir hätten weiter nichts zu zeigen. Sollte s ein Randparameter sein, so können wir davon ausgehen, dass es ein linksseitiger ist (sonst betrachten wir $\tilde{\gamma}(r) := \gamma(L - r)$).

Sei $P := \gamma(s) = \gamma(t)$ und T der bis auf Vorzeichen eindeutige Richtungsvektor des entsprechenden Torus in $\gamma(s)$. Definiere die Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ als

$$f(r) := \langle \gamma(r) - P, T \rangle, \quad r \in I.$$

Wähle nun $\delta > 0$ so klein, dass mit $O_\delta(t) := (t - \delta, t + \delta)$ und $H_\delta(s) := [s, s + \delta]$ gilt:

$$O_\delta(t) \subset I \quad \& \quad H_\delta(s) \subset I \quad (20)$$

$$O_\delta(t) \cap H_\delta(s) = \emptyset \quad (21)$$

$$|P - \gamma(r)| < \Theta/3 \quad \forall r \in O_\delta(t) \quad \& \quad |P - \gamma(r)| < \Theta/3 \quad \forall r \in H_\delta(s). \quad (22)$$

Das geht wegen der Stetigkeit von γ .

Behauptung (*): *Für $r \in H_\delta(s), r' \in O_\delta(t)$ folgt aus $f(r) = f(r')$, dass $\gamma(r) = \gamma(r')$, also insbesondere $\#\gamma^{-1}(\gamma(r)) \geq 2$, da r und r' aus disjunkten Intervallen kommen.*

Denn $f(r) = f(r')$ impliziert

$$\langle \gamma(r) - \gamma(r'), T \rangle = 0.$$

Und daraus folgt $\gamma(r), \gamma(r') \in D_{f(r)}$ ($D_\bullet$ wie in Lemma 2.9), denn $f(r) < \Theta/3$ (wegen (22)) und wegen der Torus-Eigenschaft folgt aus Lemma 2.9 jetzt $\gamma(r) = \gamma(r')$.

Da weder t noch s in einem Konstanzintervall liegen, finden wir nun $\bar{s} \in H_\delta(s)$ mit $\bar{s} > s$ und $\gamma(\bar{s}) \neq \gamma(s)$. Wegen der Torus-Eigenschaft kann

¹Für $h < 0$ lesen wir $[u, u + h] = [u - |h|, u]$.

$\gamma(\bar{s})$ nicht in der Hyperebene orthogonal zu T liegen, deshalb folgt $f(\bar{s}) \neq f(s) = 0$. Ebenso finden wir

$$\begin{aligned}\underline{t} &\in O_\delta(t) \text{ mit } f(\underline{t}) \neq 0, \underline{t} < t \\ \bar{t} &\in O_\delta(t) \text{ mit } f(\bar{t}) \neq 0, \bar{t} > t.\end{aligned}$$

Es gibt nur zwei wesentliche Möglichkeiten, die auftreten können, die anderen sind dazu äquivalent:

1. *Erster Fall:* $f(\underline{t}) < 0 < f(\bar{t})$. Setze

$$U := (f(\underline{t}), f(\bar{t})) \subset \mathbb{R}.$$

Da $O_\delta(t)$ ein Intervall ist, überdeckt $f(O_\delta(t))$ die Menge U . Nun gibt es wegen der Stetigkeit von f ein $0 < \tilde{\delta} < \delta$, so dass $f(H_{\tilde{\delta}}(s)) \subset f(O_\delta(t))$, d.h.

$$\forall r \in H_{\tilde{\delta}}(s) : \exists r' \in O_\delta(t) : f(r) = f(r'), \quad (23)$$

also insbesondere nach (*) $\gamma(r) = \gamma(r')$, aber $r \neq r'$. Damit ist $H := H_{\tilde{\delta}}(s)$ die gesuchte Menge.

2. *Zweiter Fall:* $0 < f(\underline{t}), f(\bar{t})$. Wir können davon ausgehen, dass für alle $r \in [\underline{t}, t]$ die Abschätzung $f(r) \geq 0$ gilt, denn gibt es ein r mit $f(x) < 0$, so setzen wir $\underline{t} := r$ mit $f(\underline{t}) < 0$ und verfahren wie im ersten Fall.

Setze $t^* := \min(f(\underline{t}), f(\bar{t})) > 0$, $U := [0, t^*)$. Sowohl $f([t - \delta, t])$ als auch $f((t, t + \delta])$ überdecken $U \setminus \{0\}$, d.h.

$$\forall u \in U, u \neq 0 : \exists r \in [t - \delta, t], r' \in (t, t + \delta] : f(r) = f(r') = u. \quad (24)$$

Für $0 \in U$ gilt $f(s) = f(t) = 0$. Wegen der Stetigkeit von f finden wir nun ein $0 < \tilde{\delta} < \delta$, so dass die halbseitige Umgebung $H := [t - \tilde{\delta}, t]$ nach U abgebildet wird. Sei $r \in H$ nun beliebig. Wegen $f(r) \in U$ folgt nun aus (24) und (*), dass $\#\gamma^{-1}(\gamma(r)) \geq 2$. Das war zu zeigen.

□

Mit den Lemmata 2.5 bis 2.10 haben wir nun alles zusammen, was wir benötigen, um die Differenzierbarkeit von Γ herzuleiten. Wir beweisen die Differenzierbarkeit insbesondere für nach Bogenlänge parametrisierte, injektive Kurven mit der Torus-Eigenschaft, die dann sogar in $C^{1,1}$ sind. Mit Lemma 2.6 und Lemma 2.5 können wir auf der dichten Teilmenge der differenzierbaren Parameter die Ableitung von Γ kontrollieren, die wir dann stetig fortsetzen. Letztendlich rechnet man nach, dass diese Fortsetzung gerade die Ableitung von Γ auf ganz I ist.

Satz 2.13. *Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine injektive, Lipschitz-stetige Kurve mit Lipschitz-Konstante K und habe zu festem $\Theta > 0$ die Torus-Eigenschaft. Sei, wo definiert,*

$$\xi := \frac{\gamma'}{|\gamma'|}.$$

Dann läßt sich ξ eindeutig stetig fortsetzen zu $\bar{\xi} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ und $\bar{\xi}$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante K/Θ .

Beweis:

1. Zunächst stellt man fest, dass ξ fast überall auf I definiert ist. Da γ Lipschitz, also auch absolut stetig ist, ist die Ableitung von γ fast überall auf I definiert. Wegen der Injektivität von γ und der Absolutstetigkeit gilt:

$$0 \neq \gamma(s) - \gamma(t) = \int_s^t \gamma'(\tau) d\tau \quad s \neq t \in I.$$

Also ist γ' auf keinem Teilintervall von I fast überall 0 und die Parameter s mit $\gamma'(s) \neq 0$ liegen dicht in I . Wir nennen diese Parameter

$$\tilde{I} := \{s \in I \mid \gamma'(s) \text{ existiert und } |\gamma'(s)| \neq 0\} \subset I. \quad (25)$$

Die Funktion ξ ist also auf $\tilde{I}$ definiert.

2. Wir zeigen nun: Auf $\tilde{I}$ erfüllt ξ wegen des Kippverhaltens des Torus die Lipschitz-Bedingung. Wähle $\epsilon > 0$ wie in Bemerkung 2.11. Sei $s \in \tilde{I}$ beliebig. Wir zeigen zunächst, dass ξ auf einer kleinen Umgebung von s (bzgl. der Relativtopologie in $\tilde{I}$) die Lipschitz-Bedingung erfüllt. Sei $t \in \tilde{I}$ beliebig mit $|t - s| < \epsilon$ und sei $T_s := \xi(s) \in \mathbb{S}^{N-1}$, $T_t := \xi(t) \in \mathbb{S}^{N-1}$. Aus Lemma 2.5 (Ausrichtung des Torus) wissen wir, dass T_s bzw. T_t der Richtungsvektor des Torus an der Stelle $\gamma(s)$ bzw. $\gamma(t)$ ist. Aus Lemma 2.6 (Kippverhalten) wissen wir über den Winkel $\alpha := \frac{\angle(T_s, T_t)}{2} \in [0, \pi/4)$ (vgl. Gleichung (15)):

$$\sin \alpha \leq \frac{|\gamma(s) - \gamma(t)|}{2\Theta}. \quad (26)$$

Der Winkel α ist nicht nur der Winkel zwischen den Richtungen T_s und T_t , sondern auch der Winkel zwischen den Vektoren, denn dieser Winkel ist spitz. Um dies einzusehen, reicht es $\langle \xi(t), \xi(s) \rangle \geq 0$ zu zeigen. Betrachte

$$f(r) := \langle \gamma(s+r) - \gamma(s), |\gamma'(s)|T_s \rangle.$$

Die Funktion $f(r)$ ist in $r := t - s \in \mathbb{R}$ differenzierbar und nach Lemma 2.10 strikt monoton auf $(-\epsilon, \epsilon)$. Durch eine Taylor-Entwicklung um $0 + \eta$ sehen wir, dass f tatsächlich strikt monoton steigt (Die Taylorentwicklung liefert aber nur eine Aussage für eine sehr kleine Umgebung, weshalb wir auf Lemma 2.10 nicht verzichten können):

$$f(0 + \eta) = \langle \gamma(s) + \eta\gamma'(s) + o(\eta) - \gamma(s), \gamma'(s) \rangle = \eta \underbrace{|\gamma'(s)|^2}_{>0} + o(\eta),$$

also $f(0 + \eta) - f(0) > 0$ für η genügend klein.

Damit folgern wir (vgl. [Nat54], p. 210 HS 1) $f'(r) \geq 0$ und daraus folgt das gesuchte

$$f'(r) = \langle \gamma'(t), \gamma'(s) \rangle \geq 0,$$

also auch

$$\langle \xi(t), \xi(s) \rangle \geq 0.$$

Da T_s, T_t Einheitsvektoren sind, gilt weiter

$$|T_s - T_t| = 2 \sin \alpha. \quad (27)$$

Aus den Gleichungen (26) und (27) folgern wir die lokale Lipschitz-Abschätzung:

$$\begin{aligned} |T_s - T_t| = |\xi(s) - \xi(t)| &= 2 \sin \alpha \stackrel{(26)}{\leq} \frac{|\gamma(s) - \gamma(t)|}{\Theta} \\ &\leq \frac{KD(s, t)}{\Theta} \quad \forall t \in \tilde{I}, |s - t| < \epsilon. \end{aligned} \quad (28)$$

Diese Lipschitz-Abschätzung dehnen wir nun auf ganz $\tilde{I}$ aus:

Sei $t \in \tilde{I}$ nun beliebig. Wir unterteilen $\tilde{I}$ durch Zwischenparameter r_i . Wähle $r_i \in \tilde{I}$ ($i = 1, \dots, k$) so, dass $D(r_i, r_{i+1}) < \epsilon$ ($i = 0, \dots, k-1$) und natürlich $\sum_{i=0}^{k-1} D(r_i, r_{i+1}) = D(s, t)$ mit $r_0 := s$ und $r_k := t$. Dies ist möglich für genügend großes k , da $\tilde{I}$ dicht in I liegt. Jetzt folgt

$$\begin{aligned} |\xi(s) - \xi(t)| &= \left| \sum_{i=0}^{k-1} \xi(r_i) - \xi(r_{i+1}) \right| \\ &\stackrel{(28)}{\leq} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} KD(r_i, r_{i+1})}{\Theta} \\ &= \frac{KD(s, t)}{\Theta} \quad \forall s, t \in \tilde{I}. \end{aligned} \quad (29)$$

Damit gilt die Lipschitz-Abschätzung auf ganz $\tilde{I}$ mit Konstante K/Θ .

2 DIE TORUS-EIGENSCHAFT EINER KURVE

3. Nun existiert eine eindeutige Lipschitz-stetige Fortsetzung $\bar{\xi}$ auf ganz I mit Lipschitz-Konstante K/Θ (vgl. z.B. [Alt92, Ü 2.3, S. 91]).

□

Satz 2.14 (Lipschitz-stetige, injektive Kurven mit Torus-Eigenschaft sind C^1). Die Lipschitz-stetige Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit Lipschitz-Konstante K habe zu festem $\Theta > 0$ die Torus-Eigenschaft und sei injektiv. Weiter lasse sich $|\gamma'|$ zu einer stetigen Funktion $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen und es gelte $|\gamma'(t)| > 0$ für fast alle $t \in I$.

Dann ist γ stetig differenzierbar (d.h. $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$).

Ist insbesondere γ nach Bogenlänge parametrisiert, also $\phi \equiv 1$, so ist γ' sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $1/\Theta$ (d.h. $\gamma \in C^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)$).

Beweis: Betrachte wie in Satz 2.13

$$\xi(s) := \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|} \quad \text{für } s \in \tilde{I},$$

wobei $\tilde{I}$ wie in (25) definiert sei. Wegen der Voraussetzung $|\gamma'(t)| > 0$ für fast alle $t \in I$ hat die Menge $I \setminus \tilde{I}$ Maß 0. Nach Satz 2.13 existiert eine Lipschitz-stetige Fortsetzung $\bar{\xi} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit Lipschitz-Konstante K/Θ . Auf $\tilde{I}$ gilt $\gamma' = \phi \bar{\xi}$.

Wir rechnen nun die Differenzierbarkeit von γ nach. Die Fortsetzung $\bar{\xi}$ ist in Randparametern von I wegen der Lipschitz-Stetigkeit endlich. Sei also $s \in I$ und $\{s_n\}_n \subset I$ eine Folge mit $s_n \rightarrow s$, $s_n \neq s$. Da γ auch absolut stetig ist, folgt

$$\begin{aligned} \gamma(s_n) - \gamma(s) &= \int_s^{s_n} \gamma'(\tau) d\tau = \int_{[s_n, s] \cap \tilde{I}} \gamma'(\tau) d\tau + 0 \\ &= \int_{[s_n, s] \cap \tilde{I}} (\phi \bar{\xi})(\tau) d\tau + 0 = \int_s^{s_n} (\phi \bar{\xi})(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (30)$$

und wegen $s_n - s \neq 0$

$$\frac{\gamma(s_n) - \gamma(s)}{s_n - s} = \frac{1}{s_n - s} \int_s^{s_n} (\phi \bar{\xi})(\tau) d\tau.$$

Da $\phi \bar{\xi}$ stetig ist, existiert der Limes auf der rechten Seite und damit auch $\gamma'(s)$ und es gilt:

$$\gamma'(s) = \phi(s) \bar{\xi}(s) \quad \forall s \in I. \quad (31)$$

Diese Aussage gilt auch, wenn wir in eventuellen Randparametern von I nur den einseitigen Limes betrachten. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass γ differenzierbar ist.

Die Behauptung über Bogenlängen parametrisiertes γ ergibt sich direkt aus Lemma 2.13 und Gleichung (31). $\square$

Bemerkung 2.15. Die stetige Fortsetzbarkeit von $|\gamma'|$ ist natürlich auch notwendig für die stetige Differenzierbarkeit von γ .

Satz 2.13 gilt vermutlich ähnlich, wenn γ nur absolut stetig ist. In Ungleichung (28) erbt ξ dann die gleichmäßige Stetigkeit von γ . Das Fortsetzungsargument im 3. Punkt funktioniert auch, da dafür lediglich gleichmäßige Stetigkeit benötigt wird.

Bemerkung 2.16. Ob die Voraussetzung $|\gamma'(t)| > 0$ für fast alle $t \in I$ trotz der Absolutstetigkeit und Injektivität von γ nötig ist, um die stetige Differenzierbarkeit zu erhalten, ist mir unklar. Betrachte dazu folgendes Beispiel, bei dem sich $|\gamma'|$ allerdings nicht stetig fortsetzen läßt:

Sei $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen. Definiere die Menge Ω_ϵ wie folgt

$$\Omega_\epsilon := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(q_i - \frac{\epsilon}{2^i}, q_i + \frac{\epsilon}{2^i} \right) \cap [0, 1].$$

Wir können das Maß von Ω_ϵ nach oben abschätzen durch

$$|\Omega_\epsilon| \leq \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{i-1} = 2\epsilon.$$

Andererseits wissen wir $|\Omega_\epsilon| > 0$ für $\epsilon > 0$, denn es gibt ein $i \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left(q_i - \frac{\epsilon}{2^i}, q_i + \frac{\epsilon}{2^i} \right) \subset [0, 1].$$

Betrachte nun für $\epsilon = 0.25$ die Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert als

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &:= \int_0^s \chi(\sigma) d\sigma \\ \gamma_2(s) &:= 0, \end{aligned}$$

wobei χ die Charakteristische Funktion von $\Omega_{0.25}$ sei. Dann gilt:

- γ ist Lipschitz-stetig, denn für $s, t \in [0, 1]$ gilt

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| = \left| \int_0^s \chi(\sigma) d\sigma - \int_0^t \chi(\sigma) d\sigma \right| = \left| \int_t^s \underbrace{\chi(\sigma)}_{0 \leq \chi(\sigma) \leq 1} d\sigma \right| \leq |s - t|$$

- $\gamma'_1(s) = \chi(s)$ für fast alle $s \in [0, 1]$, denn

$$\gamma'_1(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(s+h) - \gamma_1(s)}{h} \stackrel{(*)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \chi \stackrel{(**)}{=} \chi(s)$$

für fast alle $s \in [0, 1]$. Dabei gilt $(*)$ wegen Absolutstetigkeit fast überall und $(**)$ gilt fast überall, da fast alle Parameter in $[0, 1]$ Lebesgue-Punkte sind.

- γ ist injektiv, denn sei $s \neq t \in [0, 1]$, dann gilt

$$\gamma_1(s) - \gamma_1(t) = \int_t^s \gamma'(\sigma) d\sigma = \int_t^s \chi(\sigma) d\sigma \neq 0,$$

denn es gibt ein $i \in \mathbb{N}$, so dass das Intervall $U := (1/2^{i+2}, q_i + 1/2^{i+2})$ in $[s, t]$ enthalten ist und $\chi|_U = 1$.

- γ hat offensichtlich die Toruseigenschaft.

Aber die Menge $[0, 1] \setminus \Omega_{0.25}$, auf der $\gamma' = 0$ fast überall gilt, hat mindestens das Maß 0.5. Der Beweis von Satz 2.14 würde also in Gleichung (30) scheitern.

Bemerkung 2.17 (Der Beweis von Satz 2.13 in $\mathbb{R}P^{N-1}$). Die Argumentation würde sich wesentlich vereinfachen, wenn man anstelle der Tangentenvektoren T_s, T_t nur die Tangentenrichtungen betrachten würde. Dies geschieht, wenn man die Ungleichung (26) im $\mathbb{R}P^{N-1}$ betrachtet. Man bräuchte dann Lemma 2.9 bzw. 2.10 nicht mehr zu zitieren, um zu Gleichung (27) zu gelangen. Dieser Weg wird in [CKS02, Lemma 4] verfolgt. Nach meinem Verständnis wäre nach dieser Argumentation jedoch auch ein Cusp wie in Abbildung 5f differenzierbar. Lemma 2.9 schließt dies aus und ist auch für sich genommen interessant.

3 Der Globale Krümmungsradius und eine Alternative

In [GM99] haben GONZALES und MADDOCKS den Globalen Krümmungsradius eingeführt. Sie zeigen dort, dass Kurven mit nach unten beschränktem Globalen Krümmungsradius eine „Dicke“ haben. In [GMS02] führen sie zusammen mit SMUTNY verschiedene Variationen davon ein.

Wir verwenden in diesem Abschnitt eine ihrer Varianten (ρ_{pt} in [GMS02]) und zeigen, dass drei Forderungen

- Globaler Krümmungsradius größer gleich $\Theta > 0$

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

- Torus-Eigenschaft bzgl. $\Theta > 0$
- alternativer Globaler Krümmungsradius größer gleich $\Theta > 0$

äquivalent sind (vgl. Satz 3.25).

Definition 3.1 (Globaler Krümmungsradius). Sei $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine stetige Kurve. Je nachdem, ob γ eine geschlossene oder offene Kurve ist, sei I definiert als

$$I = \begin{cases} [0, L] \\ \mathbb{S}_L \end{cases},$$

wobei $L \in (0, \infty)$ die Länge des Intervalls bzw. der Kreislinie ist.

Der Wert

$$\rho_{ppp}[\gamma](s) := \inf_{\sigma, \tau \in I \setminus \{s\}, \sigma \neq \tau} R(\gamma(s), \gamma(\sigma), \gamma(\tau)) \quad (32)$$

heißt **Globaler Krümmungsradius von γ in s** .² Und

$$\Delta_{ppp}[\gamma] := \inf_{s \in I} \rho_{ppp}[\gamma](s) \quad (33)$$

heißt **Globaler Krümmungsradius von γ** . Dabei ist $R(x, y, z)$ der Radius des kleinsten Kreises durch die Punkte x, y, z :

$$R(x, y, z) := \begin{cases} \frac{|x-z|}{2 \sin \angle(x-y, y-z)} & \text{für } x, y, z \text{ nicht kollinear} \\ \infty & \text{für } x, y, z \text{ kollinear, paarweise verschieden} \\ \frac{\text{diam}(\{x, y, z\})}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 3.2 (Unterschiede zur Literatur). Die obige Definition unterscheidet sich von den Definitionen in der Literatur: In [GM99] und [GMS02] werden ebenfalls stetige Kurven γ betrachtet. Aber das Infimum in (32) wird über das Bild und nicht wie hier über das Urbild von γ genommen. Deshalb spielen dort weder Konstanz-Intervalle noch doppelt durchlaufene Kurventeile eine Rolle. Die in [GM99] folgende Analysis geht dann sogar von C^2 -Kurven aus.

In [GMSvdM02], [SvdM03a] und [SvdM04] werden alle stetigen rektifizierbaren Kurven γ zugelassen. Bei der Infimumsbildung in (32) wird jedoch statt γ die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve Γ verwendet. Bei der Bogenlängenparametrisierung werden insbesondere die Konstanz-Intervalle herausgeschnitten, nicht jedoch doppelt durchlaufene Kurventeile. Stetigkeit und Rektifizierbarkeit ist in den dort bewiesenen Sätzen oft die einzige Voraussetzung an die Glattheit der Kurve.

²Die Notation lehnt sich hier an [GMS02] an, die die Funktion $R(\gamma(\cdot), \gamma(\cdot), \gamma(\cdot))$ mit $ppp(\cdot, \cdot, \cdot)$ bezeichnen, da der Radius aus drei Punkten berechnet wird.

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

Als Beispiele für Kurven mit und ohne die Eigenschaft $\Delta_{ppp}[\gamma] \geq \Theta > 0$ kann wieder Abbildung 5 auf Seite 17 dienen, denn in Satz 3.25 zeigen wir, dass die Torus-Eigenschaft bzgl. Θ äquivalent ist zu $\Delta_{ppp}[\gamma] \geq \Theta$.

Im folgenden Lemma studieren wir das Verhalten von R , um $\Delta_{ppp}[\Gamma]$ abschätzen zu können.

Lemma 3.3 (Darstellung und Verhalten von R). *Sei $\Delta(ABC)$ das nicht entartete Dreieck der Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^N$. Für den Umkreisradius gilt:*

$$R(A, B, C) = \frac{|A - B|}{2 \sin \angle(A - C, C - B)} \quad (34)$$

$$= \frac{|A - B|}{2 \left| \frac{A-C}{|A-C|} \wedge \frac{C-B}{|C-B|} \right|}. \quad (35)$$

Bei konstantem $\overline{AB}$ ändert sich $\tilde{R}(\alpha) := R(A, B, C)$ in Abhängigkeit von $\alpha := \angle(A - C, B - C) \in [0, \pi]$ wie folgt:

$$\alpha \in [0, \pi/2] : \quad \tilde{R}(\alpha) \text{ fällt monoton} \quad (36)$$

$$\alpha \in [\pi/2, \pi] : \quad \tilde{R}(\alpha) \text{ steigt monoton.} \quad (37)$$

Beweis: Die Formel (34) ist der Sinussatz (vgl. z.B. [B81]). Aus der Linearen Algebra ist die Formel

$$|\sin \angle(A - C, C - B)| = \frac{|(A - C) \wedge (C - B)|}{|A - C||C - B|}$$

bekannt, aus der die Formel (35) folgt.

Da der Sinus auf $(0, \pi/2]$ monoton steigt, ist klar, dass $\tilde{R}$ bei festem $\overline{AC}$ monoton fällt. Umgekehrt fällt der Sinus auf $[\pi/2, \pi]$ monoton und entsprechend steigt $\tilde{R}$ monoton. $\square$

Lemma 3.4 (Verhalten von R auf Kugeloberflächen). *Sei $B_r(c) \subset \mathbb{R}^N$ ein offener Ball um c mit Radius $r > 0$ und $x, y, z \in \partial B_r(c)$ paarweise verschieden.*

Dann gilt

$$R(x, y, z) \leq r \quad (38)$$

und Gleichheit genau dann, wenn x, y, z und c komplanar sind.

Beweis: Es genügt nur den Fall $c = 0$ zu betrachten, da man mit einer Translation c auf den Nullpunkt abbilden kann.

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

Angenommen x, y, z und $c = 0$ liegen in der Ebene $E := E^2(0, \{x - 0, y - 0, z - 0\})$, dann können wir durch Drehung erreichen, dass $E = \text{span}(e_1, e_2)$, wobei $\{e_1, \dots, e_N\}$ die Standard-Einheits-Basis in $\mathbb{R}^N$ sei. Stellt man x in der Standard-Einheits-Basis dar, $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$, und berücksichtigt $x \in \partial B_r(0)$, so erhält man:

$$\sum_{i=1}^2 x_i^2 + \sum_{i=3}^N \underbrace{x_i^2}_{=0} = r^2,$$

d.h. x liegt auf dem Kreis um $c = 0$ mit Radius r . Ebenso für y und z . Damit liegen x, y und z auf dem eindeutigen Umkreis und es gilt $R(x, y, z) = r$.

Seien x, y, z und $c = 0$ nun nicht komplanar (insbesondere $N \geq 3$). Setze $E := E^2(x, \{y - x, z - x\})$. Durch Isometrien können wir erreichen, dass $E - x = \text{span}(e_1, e_2)$ und dass e_N in Richtung des Abstands von E zu $c = 0$ zeigt, d.h.

$$\forall v \in E : \langle e_N, v \rangle = \min_{w \in E} |w - 0| =: h,$$

sowie

$$e_i \perp E \quad \forall i = 3, \dots, N - 1.$$

Es gilt $h > 0$, da $c = 0 \notin E$. Der Punkt $v \in \mathbb{R}^N$ habe die Koordinaten-Darstellung $v = \sum_{i=1}^N v_i e_i$. Es gilt

$$\begin{aligned} v &\in E \cap \partial B_r(0) \\ \Leftrightarrow r^2 &= \sum_{i=1}^N v_i^2 \ \& \ v_i = 0 \ \forall i = 3, \dots, N - 1, \ v_N = h \\ \Leftrightarrow r^2 &= v_1^2 + v_2^2 + 0 + h^2 \ \& \ v_i = 0 \ \forall i = 3, \dots, N - 1, \ v_N = h \\ \Leftrightarrow r'^2 &:= r^2 - \underbrace{h^2}_{>0} = v_1^2 + v_2^2 \\ &\ \& \ v_i = 0 \ \forall i = 3, \dots, N - 1, \ v_N = h. \end{aligned} \tag{39}$$

D.h. $x, y, z \in E \cap \partial B_r(0)$ liegen auf einem Kreis mit Radius $r' < r$. Also folgt $R(x, y, z) = r' < r$, was zu zeigen war. $\square$

Lemma 3.5 (Verhalten von R auf Oberflächen von Linsengebieten.).
Seien $x \neq y \in \mathbb{R}^N$ fest vorgegeben. Für $r \geq |x - y|/2$ definiere Linsengebiete

$$L(x, y, r) := \bigcap_{c \in C(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{|x-y|}, r_C)} B_r(c)$$

mit $r_C := \sqrt{r^2 - \frac{|x-y|^2}{4}}$ und der Menge $C(\cdot, \cdot, \cdot)$ definiert wie in (1) auf Seite 1. Die Punkte x, y sind dann genau die Spitzen des Linsengebiets.

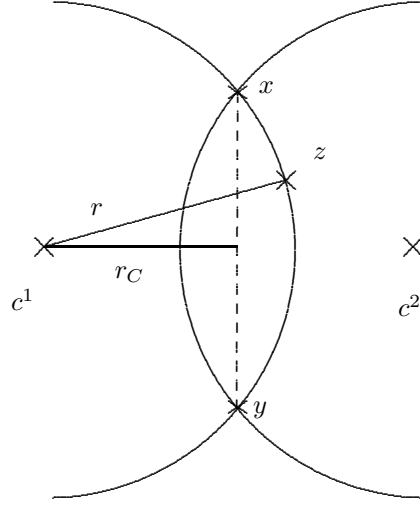


Abbildung 6: Der Punkt z im Rande des Linsengebiets hat von einem der Punkte c^1, c^2 genau den Abstand r .

Für $z \in \partial L(x, y, r)$ gilt

$$R(x, y, z) = r.$$

Beweis: Die Ebene $E := E^2(x, \{x - y, x - z\})$ schneidet $C(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{|x-y|}, r_C)$ in genau zwei Punkten c_1, c_2 . Der Punkt z hat von einem dieser beiden Punkte genau den Abstand r (vgl. Abbildung 6), also liegen x, y und z auf dem Rand eines Balls mit Radius r und der Mittelpunkt des Balls liegt in der von ihnen aufgespannten Ebene E . Mit Lemma 3.4 folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 3.6. Man kann den kleinsten Ball, der $x \neq y \in \mathbb{R}^N$ enthält, fast mit Rändern von Linsengebieten ausschöpfen:

$$B_{|x-y|/2}(\frac{x+y}{2}) \setminus (x, y) \subset \bigcup_{r \in (|x-y|/2, \infty)} \partial L(x, y, r),$$

wobei $(x, y) := \{x + s(y - x) \mid s \in (0, 1)\}$.

Beweis: Sei $p \in B_{|x-y|/2}(\frac{x+y}{2}) \setminus (x, y)$ gegeben. Wir bestimmen den Radius eines Linsengebiets, so dass p in dessen Rand enthalten ist. OBdA ist $(x+y)/2$ der Nullpunkt und $x - y$ parallel zu e_2 . Die Punkte p, x und y liegen in einer Ebene E , die OBdA von e_1, e_2 aufgespannt werde. Sei p in Koordinaten dargestellt durch $p = \sum_{i=1}^N p_i e_i$ (wobei $p_1 \neq 0$ wegen $p \notin (x, y)$ und $p_i = 0$ für $i > 2$ wegen der Wahl des Koordinatensystems). Setze

$$r_C := \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2 - \left|\frac{x-y}{2}\right|^2}{2p_1}}.$$

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

Wegen $p \in B_{|x-y|/2}(\frac{x+y}{2})$ folgt $p_1^2 + p_2^2 < (|x-y|/2)^2$ und damit $r_C > 0$. Setze nun $r := \sqrt{(|x-y|/2)^2 + r_C^2}$. Dann befindet sich der Punkt p in $\partial L(x, y, r)$, denn betrachten wir den Schnitt von E mit $C(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{|x-y|}, r_C)$, so finden wir zwei Schnittpunkte $c^1 = r_C e_1, c^2 = -r_C e_1$. OBdA sei $p_1 < 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} |p - c^1|^2 &= (p_1 - r_C)^2 + p_2^2 = p_1^2 - 2p_1 r_C + r_C^2 + p_2^2 \\ &= \left| \frac{x-y}{2} \right|^2 + r_C^2 \\ &= r^2, \end{aligned} \tag{40}$$

also liegt p auf dem Rand des Balls $B_r(c^1)$. Für alle anderen $\tilde{c} \in C(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{|x-y|}, r_C)$ gilt mit der Darstellung $\tilde{c} = \sum_{i=1}^N \tilde{c}_i e_i$, $\sum_{i=1}^N \tilde{c}_i^2 = r_C^2, \tilde{c}_2 = 0$:

$$|p - \tilde{c}|^2 = (p_1 - \tilde{c}_1)^2 + p_2^2 + \sum_{i=3}^N \tilde{c}_i^2 = p_1^2 - 2p_1 \tilde{c}_1 + p_2^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^N \tilde{c}_i^2}_{\leq r_C^2} \leq r^2,$$

denn obige Summe wird für $\tilde{c}_1 = r_C$ maximal (wir betrachten ja den Fall $p_1 < 0$). Also ist p im Inneren oder im Rand aller Bälle enthalten, über die der Schnitt gebildet wird. Damit ist $p \in \partial L(x, y, r)$, was zu zeigen war. $\square$

Wir fordern in diesem Abschnitt häufig, dass Kurven nach Bogenlänge parametrisiert sind. Das ist keine große Einschränkung, da sich rektifizierbare Kurven immer nach Bogenlänge reparametrisieren lassen (vgl. [GH96] p. 255) und wir in diesem Abschnitt auch keine Folgen von Kurven, sondern immer nur einzelne Kurven betrachten, so dass man gefahrlos reparametrisieren kann. Der Wert L in Definition 2.1 ist dann gerade die Länge der Kurve. Im folgenden Lemma werden wir zeigen, dass der Globale Krümmungsradius invariant unter strikt monotonen Umparametrisierungen ist.

Lemma 3.7. *Sei $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine stetige Kurve, $r : J \longrightarrow I$ ein Homöomorphismus³.*

Dann gilt für $s \in I$:

$$\rho_{ppp}[\gamma](s) = \rho_{ppp}[\gamma \circ r](r^{-1}(s))$$

und insbesondere

$$\Delta_{ppp}[\gamma] = \Delta_{ppp}[\gamma \circ r].$$

³Das bedeutet für Intervalle eine stetige, strikt monotone Umparametrisierung.

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

Beweis:

Sei $s \in I$ gegeben und sei $\{\sigma_i, \tau_i\}_i \subset I \times I$ eine Minimalfolge, die $R(\gamma(\cdot), \gamma(\cdot), \gamma(s))$ minimiert:

$$R(\gamma(\sigma_i), \gamma(\tau_i), \gamma(s)) \rightarrow \rho_{ppp}[\gamma](s) \text{ für } i \rightarrow \infty.$$

Da r ein Homöomorphismus ist, ist $\{r^{-1}(\sigma_i), r^{-1}(\tau_i)\} \subset J \times J$ eine zulässige Folge bei der Infimumsbildung von $\rho_{ppp}[\gamma \circ r](r^{-1}(s))$ und damit folgt:

$$\begin{aligned} \rho_{ppp}[\gamma \circ r](r^{-1}(s)) &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} R(\gamma \circ r(r^{-1}(\sigma_i)), \gamma \circ r(r^{-1}(\tau_i)), \gamma \circ r(r^{-1}(s))) \\ &= \rho_{ppp}[\gamma](s) \quad \forall s \in I. \end{aligned}$$

Die Abschätzung in der umgekehrten Richtung – und damit Gleichheit – erhalten wir durch Betrachten der Kurve $\gamma \circ r$ und des Homöomorphismus r^{-1} .

Mit

$$\Delta_{ppp}[\gamma] = \inf_{s \in I} \rho_{ppp}[\gamma](s) = \inf_{s \in I} \rho_{ppp}[\gamma \circ r](r^{-1}(s)) = \inf_{t \in J} \rho_{ppp}[\gamma \circ r](t) = \Delta_{ppp}[\gamma \circ r]$$

folgt auch die zweite Behauptung. $\square$

Die Umparametrisierung muss jedoch strikt monoton sein, denn wenn sie Doppelpunkte erzeugen würde, so würde der Globale Krümmungsradius 0 werden, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 3.8. *Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine stetige Kurve, die nicht injektiv ist und $s \neq t \in I$ mit $\gamma(s) = \gamma(t)$.*

Dann gilt $\Delta_{ppp}[\gamma] = \rho_{ppp}[\gamma](s) = 0$.

Beweis: Sei $\{s_i\}_i \subset I$ eine Folge mit $s_i \rightarrow s$. Dann gilt

$$\rho_{ppp}[\gamma](s) \leq R(\gamma(s), \gamma(t), \gamma(s_i)) \stackrel{(*)}{=} \frac{\text{diam}(\{\gamma(s), \gamma(t), \gamma(s_i)\})}{2} \rightarrow 0 \text{ für } s_i \rightarrow s.$$

Die Gleichheit in $(*)$ ist gerade die Definition von R , wenn zwei Argumente gleich sind. Damit folgt $\rho_{ppp}[\gamma](s) = 0$ und auch $\Delta_{ppp}[\gamma] = 0$. $\square$

Betrachtet man für differenzierbare Kurven Γ den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \tau} R(\Gamma(\sigma), \Gamma(\tau), \Gamma(t)),$$

so stellt man fest, dass dieser ebenfalls eine geometrische Bedeutung hat. Es ist nämlich gerade der Radius des Kreises, der durch $\Gamma(\sigma)$ und $\Gamma(\tau)$ geht und in $\Gamma(\tau)$ die Tangente $\Gamma'(\tau)$ berührt⁴. Dies nennen wir den

⁴Dies wird im Beweis von Lemma 3.13 gezeigt.

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

Definition 3.9 (Punkt-Tangenten-Radius). Für $\sigma, \tau \in I, \sigma \neq \tau$ und γ differenzierbar in τ setze

$$pt(\sigma, \tau) := \begin{cases} \infty & \text{falls } \gamma(\sigma) - \gamma(\tau) \parallel \gamma'(\tau), \gamma(\sigma) \neq \gamma(\tau) \\ 0 & \text{falls } \gamma(\sigma) = \gamma(\tau), \sigma \neq \tau \\ \frac{|\gamma(\sigma) - \gamma(\tau)|}{2 \sin \angle(\gamma(\sigma) - \gamma(\tau), \gamma'(\tau))} & \text{sonst} \end{cases}.$$

pt ist der Radius des eindeutigen Kreises, der sowohl durch $\gamma(\sigma)$ als auch durch $\gamma(\tau)$ geht und in $\gamma(\tau)$ tangential zu $\gamma'(\tau)$ ist.

Mit Hilfe des Punkt-Tangenten-Radius können wir nun eine Alternative des Globalen Krümmungsradius definieren.

Definition 3.10 (Alternativer Globaler Krümmungsradius).

Sei $\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ rektifizierbar und nach Bogenlänge parametrisiert. Seien

$$I' := \{s \in I \mid \Gamma'(s) \text{ existiert und } \Gamma'(s) \neq 0\} \subset I$$

die Parameter, in denen Γ differenzierbar ist. Wir nennen diese auch die **guten Parameter von I** . Der Wert

$$\rho_{pt}[\Gamma](\sigma) := \inf_{\tau \in I', \sigma \neq \tau} pt(\sigma, \tau) \quad (41)$$

heißt **alternativer Globaler Krümmungsradius von Γ in σ** .

$$\Delta_{pt}[\Gamma] := \inf_{s \in I} \rho_{pt}[\Gamma](s)$$

heißt **alternativer Globaler Krümmungsradius von Γ** .

Bemerkung 3.11. Da wir Parametrisierung nach Bogenlänge gefordert haben, wissen wir, dass die Menge I' der guten Parameter dicht in I liegt (nach Satz von Rademacher). Ohne diese Dichtheit wäre die obige Definition wenig brauchbar.

Bemerkung 3.12. Falls das Infimum in (41) angenommen wird, kann man die Kugel mit Radius $\rho_{pt}[\Gamma](s)$ durch die Punkte $\Gamma(s), \Gamma(t)$, tangential an $\Gamma'(t)$ betrachten. Sie ist im Allgemeinen nicht tangential an $\Gamma'(s)$, wie Abbildung 7 zeigt.

Wir beweisen im Folgenden einige Eigenschaften des alternativen Globalen Krümmungsradius. Das nächste Lemma besagt, dass wir ihn nach unten gegen den Globalen Krümmungsradius abschätzen können.

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

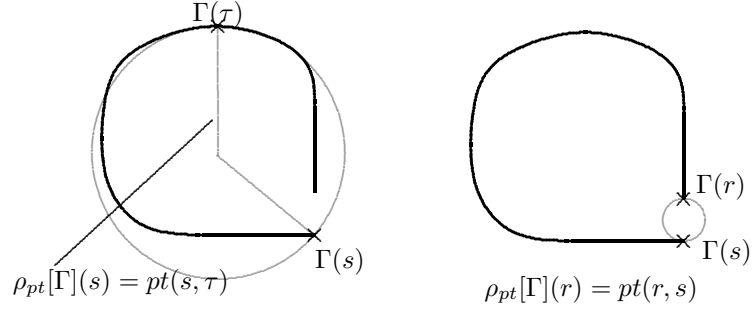


Abbildung 7: Die Kugel, deren Radius das Infimum in der Definition (41) von $\rho_{pt}[\Gamma](s)$ annimmt, muss in $\Gamma(s)$ nicht tangential sein. Tatsächlich wird das Infimum hier im Punkt r angenommen.

Lemma 3.13. Sei $\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, die auf $I' \subset I$ differenzierbar ist.

Dann gilt

$$\rho_{ppp}[\Gamma](\sigma) \leq pt(\sigma, \tau) \quad \forall \sigma \in I, \tau \in I'.$$

Insbesondere

$$\Delta[\Gamma] \leq \rho_{ppp}[\Gamma](\sigma) \leq \rho_{pt}[\Gamma](\sigma) \leq pt(\sigma, \tau) \quad \forall \sigma \in I, \tau \in I'$$

und

$$\Delta[\Gamma] \leq \Delta_{pt}[\Gamma].$$

Beweis: Seien $\sigma \in I, \tau \in I', \sigma \neq \tau$ gegeben. Die Ungleichung

$$\rho_{pt}[\Gamma](\sigma) \leq pt(\sigma, \tau)$$

ist klar. Wir zeigen zunächst

$$\rho_{ppp}[\Gamma](\sigma) \leq pt(\sigma, \tau).$$

Wir können davon ausgehen, dass $\Gamma(\sigma)$ kein Doppelpunkt ist, denn sonst folgt mit Lemma 3.8, dass $\rho_{ppp}[\Gamma](\sigma) = 0$ gilt, und es ist nichts zu zeigen. Den Fall $\gamma(\sigma) - \gamma(\tau) \parallel \gamma'(\tau)$ brauchen wir ebenfalls nicht zu betrachten, da für $pt(\sigma, \tau) = \infty$ auch nichts zu zeigen ist.

Sei $\{h_n\}_n \subset \mathbb{R}$ eine monotone Nullfolge, so dass $\tau + h_n \in I$. Der Radius des Kreises durch die Punkte $\Gamma(\sigma), \Gamma(\tau)$ und $\Gamma(\tau + h_n)$ berechnet sich wie folgt (Der Sinus ist wegen der Stetigkeit des Winkels ungleich 0 für h_n klein genug):

$$R(\Gamma(\sigma), \Gamma(\tau), \Gamma(\tau + h_n)) = \frac{|\Gamma(\sigma) - \Gamma(\tau)|}{2|\sin \angle(\Gamma(\sigma) - \Gamma(\tau + h_n), \Gamma(\tau) - \Gamma(\tau + h_n))|}.$$

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

Für $h_n \rightarrow 0$ folgt wegen der Stetigkeit von Sinus und dem Winkel $\angle$ mittels einer Taylor-Entwicklung für den Nenner:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} 2|\sin \angle(\Gamma(\sigma) - \Gamma(\tau + h_n), \Gamma(\tau) - \Gamma(\tau + h_n))| \\ &= 2 \left| \sin \angle \left(\Gamma(\sigma) - \Gamma(\tau), \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma'(\tau) + o(h_n) \right) \right| \\ &= 2|\sin \angle(\Gamma(\sigma) - \Gamma(\tau), \Gamma'(\tau))| \stackrel{(*)}{\neq} 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Die Ungleichheit in $(*)$ gilt, da der Fall $\Gamma(\sigma) - \Gamma(\tau) \parallel \Gamma'(\tau)$ bereits behandelt wurde. Damit folgt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(\Gamma(\sigma), \Gamma(\tau), \Gamma(\tau + h_n)) = pt(\sigma, \tau),$$

also

$$\rho_{ppp}[\Gamma](\sigma) \leq pt(\sigma, \tau),$$

da obige Folge auch in der Infimumsbildung (32) von $\rho_{ppp}[\Gamma](\sigma)$ berücksichtigt wird.

Durch Infimumsbildung über τ folgt

$$\rho_{ppp}[\Gamma](\sigma) \leq \rho_{pt}[\Gamma](\sigma)$$

und durch Infimumsbildung über Sigma erhalten wir schließlich

$$\Delta_{ppp}[\Gamma] \leq \Delta_{pt}[\Gamma].$$

□

Das folgende Lemma zeigt, dass Γ mit $\Delta_{pt}[\Gamma] \geq \Theta > 0$ in guten Parametern die Torus-Eigenschaft hat.

Lemma 3.14 (Torus-Eigenschaft für gute Parameter). *Sei $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ nach Bogenlänge parametrisiert. Weiter sei $t \in I'$, d.h. $\Gamma'(t) \neq 0$ existiert und es gelte $\rho_{pt}[\Gamma](s) \geq \Theta > 0$.*

Dann hat Γ in s die Torus-Eigenschaft bzgl. Θ , d.h.

$$M(\Gamma(t), \Gamma'(t)/|\Gamma'(t)|, \Theta) \cap \Gamma(I) = \emptyset.$$

Beweis: Angenommen es existiert ein $s \in I$, so dass $\Gamma(s) \in M(\Gamma(t), \Gamma'(t)/|\Gamma'(t)|, \Theta)$ gilt. Wir zeigen dann $pt(s, t) < \Theta$, was jedoch der Voraussetzung $\rho_{pt}[\Gamma](t) \geq \Theta$ widerspricht. Also kann es ein solches $s \in I$ nicht geben.

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

Beweis von $pt(s, t) < \Theta$: Die Punkte $\Gamma(s), \Gamma(t)$ und $\Gamma'(t)$ spannen eine nicht entartete Ebene E auf. Sei K die Schnittscheibe von $M(\Gamma(t), \Gamma'(t), \Theta)$ und E , in deren Inneren der Punkt $\Gamma(s)$ liegt. Die Gerade durch $\Gamma(t)$ und $\Gamma(s)$ schneide ∂K im Punkte $P = \Gamma(t) + l(\Gamma(s) - \Gamma(t))$ für ein $l > 1$. Dann gilt nach Konstruktion:

$$\Theta = \frac{|P - \Gamma(t)|}{2 \sin \angle(P - \Gamma(t), \Gamma'(t))} = \frac{l|\Gamma(s) - \Gamma(t)|}{2 \sin \angle(\Gamma(s) - \Gamma(t), \Gamma'(t))}.$$

Damit folgt die Behauptung:

$$\Theta > \frac{\Theta}{l} = \frac{|\Gamma(s) - \Gamma(t)|}{2 \sin \angle(\Gamma(s) - \Gamma(t), \Gamma'(t))} = pt(s, t).$$

□

Wegen der Stetigkeit der Torus-Eigenschaft können wir auch eine Aussage über nicht differenzierbare Parameter treffen.

Korollar 3.15 (Torus-Eigenschaft für ganz Γ). *Sei $\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Es gelte $\Delta_{pt}[\Gamma] \geq \Theta > 0$.*

Dann hat Γ die Torus-Eigenschaft bzgl. Θ .

Beweis: Für alle guten Parameter $t \in I'$ gilt:

$$\rho_{pt}[\Gamma](t) \geq \Delta_{pt}[\Gamma],$$

also hat Γ wegen Lemma 3.14 auf I' die Torus-Eigenschaft bzgl. Θ . Die guten Parameter $I' \subset I$ liegen dicht in I . Damit folgt die Behauptung mit Korollar 2.8. □

Ähnlich wie für den Globalen Krümmungsradius (Lemma 3.8) gilt auch für seine Alternative, dass sie 0 wird, sobald die betrachtete Kurve nicht mehr injektiv ist.

Lemma 3.16 (Γ ist injektiv). *Sei $\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Es gelte $\Delta_{pt}[\Gamma] \geq \Theta > 0$.*

Dann ist $\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ injektiv (bis auf Randparameter).

Beweis: Angenommen es gäbe $s, t \in I$, nicht beide Randparameter mit $s \neq t$ und $\Gamma(s) = \Gamma(t)$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit t ein innerer Parameter. Wegen Lemma 2.12 wissen wir, dass eine ganze halbseitige Umgebung H (entweder von t oder von s) aus Doppelpunkte besteht. Da die differenzierbaren Parameter I' von Γ dicht in I liegen finden wir $s' \in H$ und $t' \in I' \cap H$ mit $s' \neq t'$ und $\Gamma(s') = \Gamma(t')$. Damit folgt

$$\rho_{pt}[\Gamma](s') \leq pt(s', t') = 0.$$

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

Dies steht im Widerspruch zu

$$0 < \Theta \leq \Delta_{pt}[\Gamma] \leq \rho_{pt}[\Gamma](s').$$

Also kann die Kurve sich nur an den beiden Randparametern schneiden. $\square$

Bemerkung 3.17. *Im folgenden Satz 3.18 zeigen wir, dass Γ auf ganz I differenzierbar ist, also auch in den Randparametern. Daher können wir folgern, dass Γ sich nicht in den Randparametern schneiden kann. Denn für Randparameter $s, t \in I'$ ist es zulässig, sie in $pt()$ einzusetzen, und wir erhalten $\Delta_{pt}[\Gamma] \leq pt(s, t) = 0$, sofern $\Gamma(s) = \Gamma(t)$. Also folgt aus $\Delta_{pt}[\Gamma] \geq \Theta > 0$, dass Γ injektiv ist.*

Mit obigen Lemma wissen wir, dass die Kurve (evtl. bis auf Randparameter) injektiv ist und die Torus-Eigenschaft hat. Damit können wir Satz 2.14 anwenden und den folgenden Satz herleiten.

Satz 3.18 (Γ ist in $C^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)$). *Sei $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Es gelte $\Delta_{pt}[\Gamma] \geq \Theta > 0$.*

Dann folgt $\Gamma \in C^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)$ und

$$|\Gamma'(s) - \Gamma'(t)| \leq \frac{1}{\Theta} D(s, t).$$

Beweis:

Wegen Lemma 3.16 wissen wir, dass Γ injektiv bis auf Randpunkte ist. Sollte Γ sich in den Randparametern schneiden, so identifizieren wir diese einfach und behandeln I nicht als Intervall, sondern als Kreislinie. Mit Korollar 3.15 und Satz 2.14 folgt dann die Behauptung. $\square$

Als nächstes interessieren wir uns für Punkte auf der Kurve, in denen der Globale Krümmungsradius angenommen wird. In diesen Punkten berührt ein Ball vom Radius $\Delta_{ppp}[\Gamma]$ die Kurve Γ . Wir nennen ihn Minimalball. Es ist dabei zu beachten, dass in der Grenze die drei Punkte in $R(\cdot, \cdot, \cdot)$ zu einem Punkt zusammenfallen können – insbesondere dann, falls der Globale Krümmungsradius gerade der lokale Krümmungsradius ist. Aber auch wenn das Minimum global angenommen wird, fallen in der Regel zwei Punkte zusammen (vgl. Lemma 3.28). Dies macht die Definition eines Minimalballs etwas aufwendiger. Hinzu kommt, dass es mehrere Minimalbälle geben kann, wie das Beispiel einer Stadion-Kurve (vgl. Abbildung 8) zeigt.

Definition 3.19 (Minimalball). *Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine stetige Kurve mit $0 \leq \Delta_{ppp}[\gamma] < \infty$. Die Folge $\{(s_i^1, s_i^2, s_i^3, c_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \subset I^3 \times \mathbb{R}^N$ habe die Eigenschaften:*

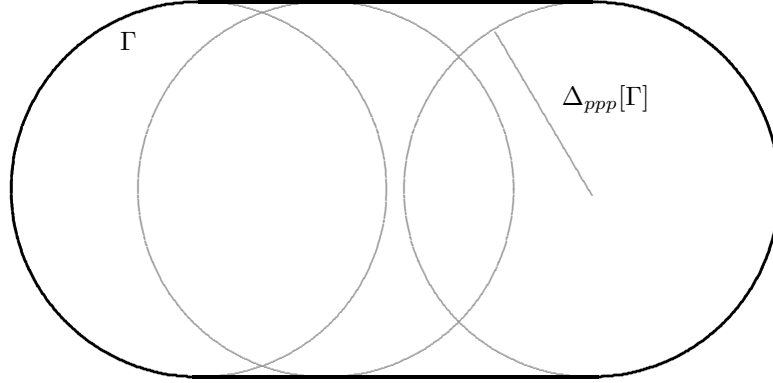


Abbildung 8: Jeder Punkt der Stadion-Kurve berührt einen Minimalball.

- (i) Sie approximiert das Infimum in (33), d.h. $R(\gamma(s_i^1), \gamma(s_i^2), \gamma(s_i^3)) \rightarrow \Delta_{ppp}[\gamma]$.
- (ii) Der Punkt $c_i \in \mathbb{R}^N$ ist jeweils der Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte $\gamma(s_i^1), \gamma(s_i^2), \gamma(s_i^3)$ mit Radius $R(\gamma(s_i^1), \gamma(s_i^2), \gamma(s_i^3))$.
- (iii) Sie konvergiert gegen einen Grenzwert

$$(s_i^1, s_i^2, s_i^3, c_i) \rightarrow (s^1, s^2, s^3, c) \in I^3 \times \mathbb{R}^N.$$

Wir nennen diese Folge eine **konvergente Minimalfolge**. Den Ball $B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c)$ durch $\gamma(s^1), \gamma(s^2)$ und $\gamma(s^3)$ mit Zentrum c und Radius $\Delta_{ppp}[\gamma]$ nennen wir einen **Minimalball an γ** . Für $\Delta_{ppp}[\gamma] > 0$ nennen wir ihn **echt**.

Tatsächlich liefert jede Minimalfolge von (33) einen Minimalball.

Lemma 3.20 (Existenz von Minimalbällen). Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine stetige Kurve mit $0 \leq \Delta_{ppp}[\gamma] < \infty$. Sei $\{(t_i^1, t_i^2, t_i^3)\}_{i \in \mathbb{N}} \subset I^3$ eine Folge, die das Infimum in (33) approximiert, d.h. $R(\gamma(t_i^1), \gamma(t_i^2), \gamma(t_i^3)) \rightarrow \Delta_{ppp}[\gamma]$. Sei der Punkt $P_i \in \mathbb{R}^N$ jeweils der Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte $\gamma(t_i^1), \gamma(t_i^2), \gamma(t_i^3)$ mit Radius $R(\gamma(t_i^1), \gamma(t_i^2), \gamma(t_i^3))$ zu t_i^1, t_i^2, t_i^3 .

Dann existiert eine konvergente Teilfolge $\{(s_i^1, s_i^2, s_i^3, c_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \{(t_i^1, t_i^2, t_i^3, P_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$(s_i^1, s_i^2, s_i^3, c_i) \rightarrow (s^1, s^2, s^3, c) \in I^3 \times \mathbb{R}^N \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Beweis: Da wir eine Minimalfolge betrachten, liegen fast alle P_i nahe an γ :

$$P_i \in \overline{B_{2\Delta_{ppp}[\gamma]+1}(\gamma(I))} \quad \text{für fast alle } i.$$

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

Da I^3 und $\overline{B_{2\Delta_{ppp}[\gamma]+1}(\gamma(I))}$ kompakt sind, hat die Folge $\{(t_i^1, t_i^2, t_i^3, P_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, die wir mit $\{(s_i^1, s_i^2, s_i^3, c_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ bezeichnen und die gegen einen Grenzwert (s^1, s^2, s^3, c) konvergiert. $\square$

Lemma 3.21. *Sei $\Gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ nach Bogenlänge parametrisiert und sei $B_r(c) \subset \mathbb{R}^N$ ein Ball mit $r > 0$. Weiter sei $s \in \text{int } I$ ein innerer Parameter mit $\Gamma(s) \in \partial B_r(c)$ und $\langle \Gamma(s) - c, \Gamma'(s) \rangle \neq 0$.*

Dann existiert ein $h_0 > 0$, so dass eine der beiden folgenden Aussagen gilt:

$$\Gamma(s+h) \in B_r(c) \quad \text{für } h_0 > h > 0$$

oder

$$\Gamma(s+h) \in B_r(c) \quad \text{für } 0 > h > -h_0.$$

Beweis: Wir können oBdA $c = 0$ annehmen. Setze $w := \langle \Gamma(s) - c, \Gamma'(s) \rangle \neq 0$. Wir betrachten den Fall $w > 0$. Sei $h \in \mathbb{R}$ beliebig mit $s+h \in I$. Durch eine Taylorentwicklung erhalten wir für $0 < h_0 \ll 1$ und $h > -h_0$

$$\begin{aligned} |\Gamma(s+h)|^2 &= |\Gamma(s) + h\Gamma'(s) + o(h)|^2 \\ &= |\Gamma(s)|^2 + 2h\langle \Gamma(s), \Gamma'(s) \rangle + o(h) \\ &= |\Gamma(s)|^2 + 2hw + o(h) < |\Gamma(s)|^2 \quad \text{für } 0 > h > -h_0. \end{aligned}$$

Also

$$\Gamma(s+h) \in B_r(c) \quad \text{für } 0 > h > -h_0.$$

Der Fall $w < 0$ geht ähnlich mit $h_0 > h > 0$. $\square$

Schon in [GM99] wurde behauptet, dass eine Sphäre mit Radius echt kleiner als $\Theta > 0$ eine C^1 -Kurve Γ mit $\Delta_{ppp}[\Gamma] \geq \Theta > 0$ nicht an mehr als zwei Punkten oder transversal schneiden kann. Ein Minimalball kann zwar in mehr als zwei Punkten berühren, aber dafür ist Γ in mindestens einem Punkt tangential zum Minimalball (Mehr können wir für offene Kurven auch nicht erwarten, wie Abbildung 5c auf Seite 17 zeigt).

Lemma 3.22 (γ tangiert jeden echten Minimalball). *Es gelte*

(i) $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ und γ injektiv.

(ii) $\infty > \Delta_{ppp}[\gamma] > 0$ und sei $c \in \mathbb{R}^N$ das Zentrum eines Minimalballs $B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c)$.

Dann tangiert γ den Minimalball $B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c)$ in mindestens einem Punkt, d.h. es gibt mindestens ein $s \in I$ mit $\gamma(s) \in \partial B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c)$ und $(\gamma(s) - c) \perp \gamma'(s)$. (An Randparametern ist $\gamma'(s)$ die einseitige Ableitung von γ).

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

Beweis: Sei $(s_i^1, s_i^2, s_i^3, c_i) \rightarrow (s^1, s^2, s^3, c)$ die zu $B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c)$ gehörende Minimalfolge. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

- (i) s^1, s^2, s^3 sind paarweise verschieden. Dann sind auch ihre Bilder unter γ paarweise verschieden, da γ injektiv ist. Angenommen, γ tangiert den Minimalball $\partial B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c)$ in keinem der Punkte $\gamma(s^1), \gamma(s^2)$ und $\gamma(s^3)$. Dann gibt es mindestens zwei Punkte auf dem Minimalball, an denen γ in das Innere des Minimalballs läuft (vgl. Lemma 3.21), was die folgenden eingerückten Absätze verdeutlichen.

Wenn von den Parametern s^1, s^2 und s^3 nur einer oder gar keiner Randparameter ist (oBdA seien $\gamma(s^2)$ und $\gamma(s^3)$ keine Randpunkte), so ist das klar.

Sind jedoch zwei Punkte Randpunkte (oBdA $\gamma(s^1)$ und $\gamma(s^2)$), so läuft γ im dritten Punkt in den Minimalball herein und muss ihn auch wieder verlassen, entweder durch einen Randpunkt (oBdA $\gamma(s^2)$), aber von innen oder durch einen Punkt $\gamma(s^4)$, wobei s^4 auch im Inneren von I liegt. Im letzten Fall vergessen wir den Randpunkt $\gamma(s^2)$ und betrachten eine Folge, die gegen (s^1, s^4, s^3, c) konvergiert. Auch sie ist nach Konstruktion eine konvergente Minimalfolge.

Wir können nun also annehmen, dass die Kurve γ sowohl in $\gamma(s^2)$ als auch in $\gamma(s^3)$ in das Innere des Minimalballs hereinfläuft. Nun können wir den Minimalball in $\gamma(s^1)$ festhalten und etwas schrumpfen, d.h. wir bewegen das Zentrum c auf einer Geraden auf $\gamma(s^1)$ zu und verkleinern den Radius entsprechend. Da γ sowohl im Punkt $\gamma(s^2)$ als auch in $\gamma(s^3)$ in das Innere des Minimalballs hereinfläuft, schneidet der Rand des Minimalballs die Kurve γ wieder in drei verschiedenen Punkten $\gamma(s^1), \gamma(s^{2*}), \gamma(s^{3*})$. Da aber der Radius etwas kleiner ist, haben wir $s^1, s^{2*}, s^{3*} \in I$ gefunden mit $R(\gamma(s^1), \gamma(s^{2*}), \gamma(s^{3*})) < \Delta_{ppp}[\gamma]$ (nach Lemma 3.4). Dies ist ein Widerspruch zur Definition von $\Delta_{ppp}[\gamma]$. Also muss der Minimalball die Kurve γ in mindestens einem Punkt tangieren.

- (ii) *Mindestens zwei Parameter konvergieren gegen einen Grenzparameter.* OBdA gelte $s_i^1, s_i^2 \rightarrow s^1$. Betrachte folgendes Skalarprodukt:

$$\left\langle c_i - \frac{\gamma(s_i^1) + \gamma(s_i^2)}{2}, \frac{\gamma(s_i^1) - \gamma(s_i^2)}{s_i^1 - s_i^2} \right\rangle = 0.$$

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

Es ist gleich 0, da $\gamma(s_i^1)$ und $\gamma(s_i^2)$ auf einem Kreis um c_i liegen. Mit $i \rightarrow \infty$ gilt für den linken Faktor:

$$c_i - \frac{\gamma(s_i^1) + \gamma(s_i^2)}{2} \rightarrow c - \frac{\gamma(s^1) + \gamma(s^1)}{2} = c - \gamma(s^1)$$

und für den rechten Faktor gilt:

$$\frac{\gamma(s_i^1) - \gamma(s_i^2)}{s_i^1 - s_i^2} \rightarrow \gamma'(s^1).$$

Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts folgt die Behauptung:

$$\langle c - \gamma(s^1), \gamma'(s^1) \rangle = 0.$$

□

Mit dem vorigen Lemma können wir zeigen, dass wir uns auf spezielle Minimalfolgen beschränken können.

Lemma 3.23. *Sei $\gamma \in C^1$ mit $\Delta_{ppp}[\gamma] > 0$. Sei $\{(s_i^1, s_i^2, s_i^3, c_i)\}_i \subset I^3 \times \mathbb{R}^N$ eine konvergente Minimalfolge mit*

$$(s_i^1, s_i^2, s_i^3, c_i) \rightarrow (s^1, s^2, s^3, c) \quad \text{für } i \rightarrow \infty,$$

so dass s^1, s^2, s^3 jeweils paarweise verschieden sind.

Dann existieren $t, t^1 \in I$ und eine konvergente Minimalfolge $\{t_i^1, t_i^2, t_i^3, P_i\}_i \subset I^3 \times \mathbb{R}^N$ mit

$$(t_i^1, t_i^2, t_i^3, P_i) \rightarrow (t^1, t, t, c) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Beweis: Sei $t \in I$ der Parameter, in dem γ den Ball $B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c)$ tangiert. OBdA gelte $s^1 \neq t$. Seien $\{t_i^2\}_i, \{t_i^3\}_i \subset I \setminus \{s^1\}$ gliedweise verschiedene Folgen mit $t_i^2, t_i^3 \rightarrow t$ für $i \rightarrow \infty$. Setze $t_i^1 := s^1$ und sei P_i der Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte $\gamma(t_i^1)$, $\gamma(t_i^2)$ und $\gamma(t_i^3)$. Betrachte die Folge $(t_i^1, t_i^2, t_i^3, P_i)$. Wie im Beweis von Lemma 3.13 gilt

$$R(\gamma(t_i^1), \gamma(t_i^2), \gamma(t_i^3)) \rightarrow pt(s^1, t) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Da $pt(s^1, t)$ der Radius des kleinsten Kreises K durch $\gamma(s^1), \gamma(t)$, tangential zu $\gamma'(t)$ ist, wissen wir, dass er auf dem Ball $B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c)$ liegt und dass daher $pt(s^1, t) \leq \Delta_{ppp}[\gamma]$ gilt (Beweis ähnlich Lemma 3.4). Andererseits wissen wir $\Delta_{ppp}[\gamma] \leq pt(s^1, t)$ aus Lemma 3.13. Also ist $pt(s^1, t) = \Delta_{ppp}[\gamma]$ und K ist ein

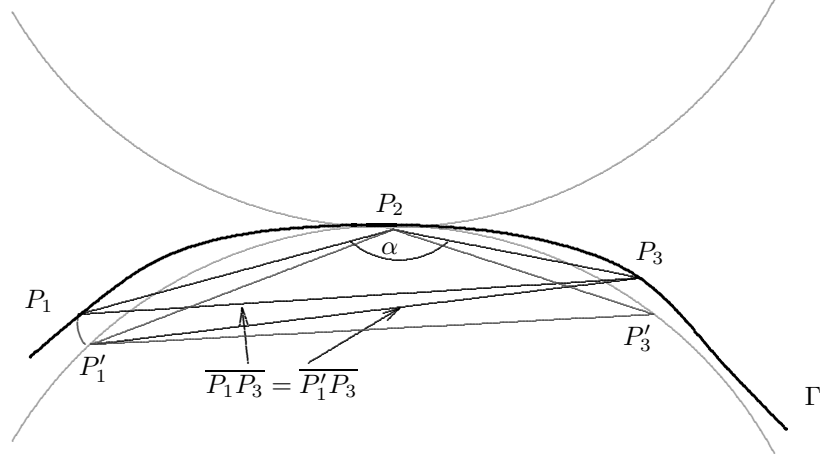


Abbildung 9: Torus-Eigenschaft und Globaler Krümmungsradius.

Großkreis. Daher gilt $P_i \rightarrow c$ und $(t_i^1, t_i^2, t_i^3, P_i)$ ist die gesuchte konvergente Minimalfolge. $\square$

Man erwartet, dass Γ nicht in das Innere eines Minimalballs laufen kann. Dies zeigen wir etwas später in Lemma 3.26. Der folgende Satz zeigt, dass eine Kurve Γ mit der Torus-Eigenschaft bzgl. $\Theta > 0$ auch einen Globalen Krümmungsradius $\Delta_{ppp}[\Gamma]$ größer gleich Θ hat.

Satz 3.24 (Torus-Eigenschaft und Globaler Krümmungsradius). *Sei $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ nach Bogenlänge parametrisiert, injektiv und habe die Torus-Eigenschaft zu $\Theta > 0$.*

Dann gilt $\Delta_{ppp}[\Gamma] \geq \Theta > 0$.

Beweis: (Vgl. auch [GMSvdM02] p.36 Lemma 3 (i))

Für $\Delta_{ppp}[\Gamma] = \infty$ ist nichts zu zeigen. Sei Γ im Folgenden also keine gerade Linie.

Der Beweis erfolgt nun in mehreren Schritten.

1. Sei s_i^1, s_i^2, s_i^3 eine konvergente Minimalfolge. Angenommen es gelte $\Delta_{ppp}[\Gamma] = 0$, dann konvergieren die Parameter s_i^1, s_i^2, s_i^3 gegen einen gemeinsamen Grenzwert. Betrachte dazu

$$\begin{aligned} 0 = \Delta_{ppp}[\Gamma] \leftarrow R(s_i^1, s_i^2, s_i^3) &= \frac{|\Gamma(s_i^1) - \Gamma(s_i^2)|}{2 \sin \angle(\Gamma(s_i^1) - \Gamma(s_i^2), \Gamma(s_i^3) - \Gamma(s_i^2))} \\ &\geq \frac{|\Gamma(s_i^1) - \Gamma(s_i^2)|}{2}. \end{aligned}$$

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

Also $|\Gamma(s_i^1) - \Gamma(s_i^2)| \rightarrow 0$ und wegen der Injektivität von Γ folgt, dass s_i^1 und s_i^2 gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren. Ebenso folgert man für jedes andere Parameter-Paar aus s_i^1, s_i^2, s_i^3 . Also konvergieren sie gegen einen gemeinsamen Grenzwert.

2. *Angenommen alle drei Parameter konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzparameter: $s_i^1, s_i^2, s_i^3 \rightarrow s$, dann gilt $\Delta_{ppp}[\Gamma] \geq \Theta$.* Beweis: Sei i so groß, dass $|s - s_i^j| < \epsilon := \Theta/3$, $j = 1, 2, 3$ (vgl. Lemma 2.9). Wir schätzen $R(s_i^1, s_i^2, s_i^3)$ nun nach unten ab. Für festes i können wir s_i^1, s_i^2, s_i^3 immer so umsortieren, dass Γ die Punkte $\Gamma(s_i^1), \Gamma(s_i^2), \Gamma(s_i^3)$ in dieser Reihenfolge durchläuft. Betrachte nun den Torus $M(\Gamma(s_i^2), \Gamma'(s_i^2), \Theta)$ und setze $P_1 := \Gamma(s_i^1)$, $P_2 := \Gamma(s_i^2)$ und $P_3 := \Gamma(s_i^3)$. Wieder können wir uns mit Hilfe von Lemma 1.7 (ii) auf den zweidimensionalen Fall beschränken, indem wir nur die von den Punkten P_1, P_2 und P_3 aufgespannte Ebene $E = E^2(P_2, \{P_1 - P_2, P_3 - P_2\})$ betrachten und den in ihr enthaltenen Torus $M_E(P_2, T, \Theta)$, wobei der Richtungsvektor $T \in \mathbb{S}_E^1$ gerade die Projektion $T := p(\Gamma(s_i^2))$ ist (p wie in Lemma 1.7 (ii)).

Da ϵ klein genug ist, befinden sich P_1 und P_3 bereits in $B_{\Theta/3}(P_2) \setminus M(P_2, T, \Theta)$, und zwar auf zwei unterschiedlichen Seiten (wegen Lemma 2.9). Deshalb ist der Winkel $\alpha := \angle(P_1 - P_2, P_3 - P_2) > \pi/2$ stumpf. Verkleinert man nun α , indem man die Seite $\overline{P_1 P_2}$ zu $\overline{P'_1 P_2}$ verlängert und dabei herunter klappt und die anderen Seiten des Dreiecks gleich lang läßt (vgl. Abbildung 9), so dass $P'_1 \in \partial M(\Gamma(P_2), \Gamma'(s_i^2), \Theta)$, so wissen wir wegen Lemma 3.3, dass wir den Umkreis des Dreiecks nur kleiner gemacht haben (der Winkel α wird kleiner, bleibt aber stumpf). Ähnlich finden wir $P'_3 \in \partial M(\Gamma(P_2), \Gamma'(s_i^2), \Theta)$ und erhalten:

$$R(P_1, P_2, P_3) \geq R(P'_1, P_2, P_3) \geq R(P'_1, P_2, P'_3) = \Theta.$$

Damit folgt aber

$$\Theta \leq \lim_{i \rightarrow \infty} R(\Gamma(s_i^1), \Gamma(s_i^2), \Gamma(s_i^3)) \rightarrow \Delta_{ppp}[\Gamma]$$

also $\Delta_{ppp}[\Gamma] \geq \Theta$, was zu zeigen war.

Wir wissen nun insbesondere, dass $\Delta_{ppp}[\Gamma] > 0$ gelten muss.

3. *Angenommen mindestens zwei Parameter konvergieren gegen unterschiedliche Grenzparameter.* Dann gilt insbesondere $\Delta_{ppp}[\Gamma] > 0$. Wegen Satz 2.14 wissen wir $\Gamma \in C^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)$, also muss wegen Lemma 3.22 jeder Minimalball tangieren. Wir können also eine Minimalfolge

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

$(s_i^1, s_i^2, s_i^3, c_i)$ finden (nach Lemma 3.23), die gegen einen gemeinsamen Grenzparameter konvergiert. OBdA tangiere der Minimalball in $\Gamma(s^2)$ und es gelte $s_i^2, s_i^3 \rightarrow s^2 = s^3$, wobei (s^1, s^2, s^3, c) der Grenzwert der Minimalfolge ist. Es gelte also $s^1 \neq s^2, s^2 = s^3$ (Sonst verfahren wir wie im vorhergehenden Fall). Für $i \rightarrow \infty$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \Delta_{ppp}[\Gamma] &\stackrel{(*)}{\leftarrow} R(s_i^1, s_i^2, s_i^3) \\ &= \frac{|\Gamma(s_i^1) - \Gamma(s_i^2)|}{2|\sin \angle(\Gamma(s_i^1) - \Gamma(s_i^3), \Gamma(s_i^2) - \Gamma(s_i^3))|} \stackrel{(**)}{\rightarrow} pt(s^1, s^3) \end{aligned} \quad (43)$$

In dieser Gleichung gilt (*), da (s_i^1, s_i^2, s_i^3) eine Minimalfolge ist und (**) folgt wie im Beweis von Lemma 3.13. Da $pt(s^1, s^3)$ gerade der Radius des Kreises durch $\Gamma(s^3)$ und $\Gamma(s^1)$ und tangential an $\Gamma'(s^3)$ ist, ist er größer gleich Θ , denn sonst wäre $\Gamma(s^1) \in M(\Gamma(s^3), \Gamma'(s^3), \Theta)$, was den Voraussetzungen widerspräche. Mit dieser Beobachtung und durch Grenzübergang in Gleichung (43) erhalten wir

$$\Delta_{ppp}[\Gamma] = pt(s^1, s^3) \geq \Theta,$$

was zu zeigen war. □

Wir fassen nun die vorigen Resultate zusammen in folgendem Satz:

Satz 3.25 (Äquivalenzsatz). *Sei $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine stetige, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und sei $\Theta > 0$. Dann sind äquivalent:*

- (i) $\Delta_{pt}[\Gamma] \geq \Theta$.
- (ii) Γ hat die Torus-Eigenschaft zu Θ und ist injektiv.
- (iii) $\Delta_{ppp}[\Gamma] \geq \Theta$.

Insbesondere gilt also

$$\Delta_{ppp}[\Gamma] = \Delta_{pt}[\Gamma].$$

Beweis:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Dies ist gerade die Aussage von Korollar 3.15.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Dies ist die Aussage von Satz 3.24.
- (iii) $\Rightarrow$ (i) Dies hatten wir bereits in Lemma 3.13 gezeigt.

□

Lemma 3.26 (Jeder echte Minimalball ist leer). *Sei $\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\infty > \Delta_{ppp}[\Gamma] = \Delta_{pt}[\Gamma] \geq \Theta > 0$. Sei $B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$ ein Minimalball.*

Dann gilt $B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c) \cap \Gamma(I) = \emptyset$.

Ist $s \in \text{int } I$ innerer Parameter mit $\Gamma(s) \in \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$, so gilt:

$$(\Gamma(s) - c) \perp \Gamma'(s).$$

Beweis: Aus Satz 3.18 folgern wir $\Gamma \in C^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)$. Wegen $\Delta_{ppp}[\Gamma] > 0$ wissen wir, dass der Minimalball echt ist. Angenommen es gäbe ein $s \in I$ mit $\Gamma(s) \in B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$. Wegen Lemma 3.22 wissen wir, dass ein $t \in I$ mit

$$\Gamma(t) - c \perp \Gamma'(t)$$

existiert. Damit ist der kleinste zu $\Gamma'(t)$ tangential Ball, auf dessen Rand $\Gamma(s)$ liegt, echt kleiner als der Minimalball mit Radius $\Delta_{ppp}[\Gamma]$. Nach Definition gilt aber $pt(s, t) \geq \Delta_{pt}[\Gamma] = \Delta_{ppp}[\Gamma]$. Das ist ein Widerspruch.

Sei $s \in \text{int } I$ mit $\Gamma(s) \in \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$. Wäre $\Gamma'(s)$ in $\Gamma(s)$ nicht tangential zu $\partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$, so würde nach Lemma 3.21 ein $s' \in I$ existieren mit $\Gamma(s') \in B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$, was nach vorigem Absatz unmöglich ist. □

Berührt eine geschlossene Kurve Γ den Rand eines Minimalballs in nicht antipodischen Punkten, so verläuft Γ zwischen ihnen auf einem Großkreis.

Satz 3.27. *Sei Γ eine geschlossene Kurve, parametrisiert nach Bogenlänge mit $\Delta_{ppp}[\Gamma] \geq \Theta > 0$. Weiter sei $B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c) \subset \mathbb{R}^N$ ein Minimalball und $x, y \in \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c) \cap \Gamma(I)$ mit $|x - y| < 2\Delta_{ppp}[\Gamma]$.*

Dann verläuft eine Komponente von $\Gamma(I) \setminus \{x, y\}$ zwischen x und y auf einem Großkreis auf $\partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$.

Zum Beweis des Satzes zeigen wir zunächst ein Lemma, das im Wesentlichen auf eine Vermutung von MICHAEL FARBER zurückgeht (vgl. aber auch [SvdM03a], Proposition 2). Man betrachte die Abbildung 10, um ein Bild von den Aussagen (i) und (ii) zu bekommen (und Abbildung 8 der Stadionkurve auf Seite 40; der mittlere Kreis ist ein Beispiel für antipodische Schnittpunkte).

Lemma 3.28 (Schnitt von Γ mit Rand eines echten Minimalballs).

Sei $\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine stetige, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\Delta_{ppp}[\Gamma] \geq \Theta > 0$. Weiter sei $B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c) \subset \mathbb{R}^N$ ein Minimalball und $x, y \in \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c) \cap \Gamma(I)$ mit $|x - y| < 2\Delta_{ppp}[\Gamma]$.

Dann ist mindestens eine der beiden folgenden Aussagen wahr:

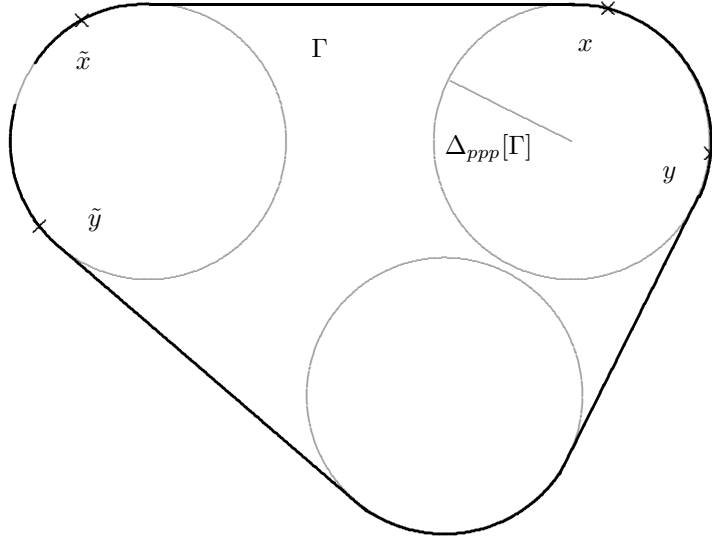


Abbildung 10: Schnitt vom Rand eines Minimalballs mit dem Bild von Γ . Die Punkte x und y sind wie im Fall (i) von Lemma 3.28, $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ sind dagegen wie im Fall (ii).

- (i) Es existiert ein Intervall $J \subset I$ mit $x, y \in \Gamma(J) \subset \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$.
- (ii) Es existieren Intervalle $J_1, J_2 \subset I$ mit $J_i \cap \partial I \neq \emptyset$ ($i = 1, 2$) und $x \in \Gamma(J_1) \subset \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$ sowie $y \in \Gamma(J_2) \subset \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$.

Der Fall (ii) kann nur bei offenen Kurven auftreten.

Beweis: Wegen Satz 3.25 gilt $\Delta_{pt}[\Gamma] \geq \Theta > 0$. Und aus Satz 3.18 folgt $\Gamma \in C^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)$. Wegen Lemma 3.8 ist Γ injektiv.

Definiere für $r \in I$ und $\Gamma(r) \in \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$ die Menge $J(r)$ als die Vereinigung aller abgeschlossenen Intervalle K , die r enthalten und deren Bilder ganz in $\partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$ liegen

$$J(r) := \bigcup_{r \in K \subset I, \Gamma(K) \subset \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)} K.$$

Die Menge $J(r)$ hat die folgenden Eigenschaften:

- Sie ist nicht leer, denn $r \in J(r)$.
- Sie ist zusammenhängend, denn sie ist die Vereinigung zusammenhängender Mengen mit dem gemeinsamen Parameter r .

3 DER GLOBALE KRÜMMUNGSRADIUS UND EINE ALTERNATIVE

- $J(r)$ ist kompakt. Es ist abgeschlossen, denn sei $u \in \partial J(r)$ und $\{u_i\} \subset J(r)$ eine Folge mit $u_i \rightarrow u$, so folgt wegen der Stetigkeit von Γ und der Abgeschlossenheit von $\partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$:

$$\partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c) \ni \gamma(u_i) \rightarrow \gamma(u) \in \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Also ist die abgeschlossene, zusammenhängende Menge $J(r) \cup \partial J(r)$ ein zulässiger Kandidat für K . Daher ist $J(r)$ abgeschlossen. Wegen der Beschränktheit ist $J(r)$ auch kompakt.

- Es gilt $r' \in J(r) \Leftrightarrow J(r) = J(r')$. Denn aus $r' \in J(r)$ folgt die Existenz eines Intervalls K mit $r, r' \in K, \Gamma(K) \subset \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$. Damit folgt $r \in J(r')$. Und $J(r')$ erfüllt $\Gamma(J(r')) \subset \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$ und ebenso $\Gamma(J(r)) \subset \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$, also $J(r) = J(r')$. Die Umkehrung ist klar.

Setze $s := \Gamma^{-1}(x), t := \Gamma^{-1}(y)$. Gilt $J(s) = J(t)$, so folgt $x, y \in \Gamma(J(s))$ und wir haben mit $J = J(s)$ gezeigt, dass die Aussage (i) wahr ist.

Angenommen $J(s) \neq J(t)$. Also $J(s) \cap J(t) = \emptyset$. Sei

$$d := \min_{x' \in \Gamma(J(s)), y' \in \Gamma(J(t))} |x' - y'|.$$

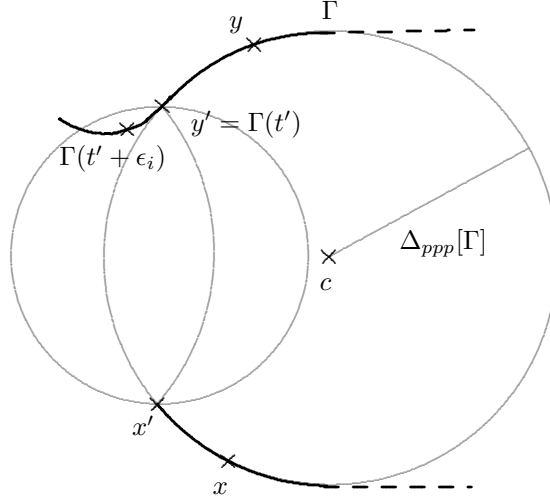
Wegen der Kompaktheit und da $\Gamma(J(s))$ und $\Gamma(J(t))$ wegen der Injektivität von Γ disjunkt sind, folgt $d > 0$ und das Minimum in der Definition von d wird angenommen. Seien $x' \in \Gamma(J(s))$ und $y' \in \Gamma(J(t))$ derart, dass $0 < d = |x' - y'| < 2\Delta_{ppp}[\Gamma]$ gilt. Setze $s' := \Gamma^{-1}(x') \in J(s)$ und $t' := \Gamma^{-1}(y') \in J(t)$. Sind sowohl s' als auch t' Randparameter von I , so setzen wir $J_1 = J(s), J_2 = J(t)$ und Aussage (ii) ist wahr.

Angenommen einer der Parameter s', t' ist kein Randparameter. Wir führen das zum Widerspruch. OBdA sei t' innerer Parameter. Setze nun $T := \Gamma'(t')/|\Gamma'(t')|$. Wegen Bogenlängenparametrisierung gilt $\Gamma'(t') \neq 0$. Nun gilt

$$\langle T, x' - y' \rangle \neq 0, \tag{44}$$

denn sonst wäre $pt(s', t') = |x' - y'|/2 < \Delta_{ppp}[\Gamma]$, was ein Widerspruch zu den Voraussetzungen ist. Betrachte nun das Linsengebiet $L := L(x', y', \Delta_{ppp}[\Gamma])$ definiert wie in Lemma 3.5. Es gilt $L \subset B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$, da der Minimalball einer der Schnitt-Bälle der Konstruktion von L ist (vgl. Abbildung 11). Wegen Lemma 3.26 folgt $\Gamma(I) \cap L = \emptyset$. Sei $\{\epsilon_i\}_i$ nun eine monotone Nullfolge, so dass $\langle \Gamma(t + \epsilon_i) - y', x' - y' \rangle > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\Gamma(t + \epsilon_i) \notin \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$. Dies ist möglich wegen (44) mit Lemma 3.21 und da $J(t)$ maximal war mit $\Gamma(J(t)) \subset \partial B_{\Delta_{ppp}[\Gamma]}(c)$. Wähle nun ein n so groß, dass

$$\Gamma(t + \epsilon_i) \in B_{|x' - y'|/2}(\frac{x' + y'}{2}) \setminus L(x', y', \Delta_{ppp}[\Gamma]) \quad \forall i \geq n.$$



Abbildungung 11: Zum Beweis von Lemma 3.28. Der Radius $R(x', y', \Gamma(t' + \epsilon_i))$ ist kleiner als $\Delta_{ppp}[\Gamma]$, was den Voraussetzungen widerspricht.

Mit Bemerkung 3.6 folgt nun, dass ein $r' \in (|x' - y'|/2, \Delta_{ppp}[\Gamma])$ existiert mit $\Gamma(t + \epsilon_n) \in \partial L(x', y', r')$, also $R(\Gamma(s), \Gamma(t), \Gamma(t + \epsilon_n)) \leq r' < \Delta_{ppp}[\Gamma]$. Dies ist ein Widerspruch zu den Voraussetzungen. Also ist Aussage (i) oder (ii) wahr. $\square$

Verläuft eine Kurve auf dem Rand eines Minimalballs, so liegt sie auf einem Großkreis:

Lemma 3.29 (Kurven auf Minimalbällen sind Großkreise). *Sei γ eine Kurve mit $\Delta_{ppp}[\gamma] \geq \Theta > 0$ und $B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c) \subset \mathbb{R}^N$ ein Minimalball. Weiter enthalte die Menge $J \subset I$ mindestens drei Parameter und es gelte $\gamma(J) \subset \partial B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c)$.*

Dann ist $\gamma(J)$ Teilmenge eines Großkreises auf $\partial B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c)$.

Beweis: Wegen Lemma 3.8 folgt, dass Γ injektiv ist. Deshalb und da I mehr als zwei Parameter enthält, finden wir $s, s' \in J$, so dass $\gamma(s), \gamma(s')$ nicht antipodisch liegen. Es gilt nun für alle $t \in J \setminus \{s, s'\}$, dass $\gamma(t) \in E := E_2(c, \{\gamma(s) - c, \gamma(s') - c\})$, denn sonst folgt aus Lemma 3.4, dass $R(\gamma(s), \gamma(s'), \gamma(t)) < \Delta_{ppp}[\gamma]$. Dies bedeutet jedoch gerade, dass $\gamma(J) \subset E \cap \partial B_{\Delta_{ppp}[\gamma]}(c)$ Teilmenge eines Großkreises ist. $\square$

Nun können wir Satz 3.27 beweisen:

Beweis: [Satz 3.27] Wegen Lemma 3.28 wissen wir, dass ein Intervall $J \subset I$

existiert mit $x, y \in \gamma(J) \cap \partial B_{\Delta_{PPP}[\gamma]}(c)$. Mit Lemma 3.29 folgt schließlich, dass J von γ auf einen Großkreis abgebildet wird. $\square$

Bemerkung 3.30. *Liegen drei Punkte x, y, z einer geschlossenen Kurve Γ auf einem echten Minimalball und sind alle Winkel des Dreiecks $\Delta(x, y, z)$ kleiner als $\pi/2$, so ist Γ ein Großkreis des Minimalballs, denn Γ läuft zwischen allen drei Punkten auf einem Großkreis und Γ ist injektiv.*

4 Regularität von $\rho_{PPP}[\Gamma](\cdot)$ und $\rho_{PT}[\Gamma](\cdot)$

In diesem Abschnitt behandeln wir die Regularität von $\rho_{PPP}[\Gamma](\cdot)$ und $\rho_{PT}[\Gamma](\cdot)$ zu einer gegebenen festen Kurve $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$. Wir zeigen, dass sowohl $\rho_{PPP}[\Gamma](\cdot)$, als auch $\rho_{PT}[\Gamma](\cdot)$ oberhalbstetig sind und untersuchen den Spezialfall, dass sie in einem Punkt unendlich werden.

Lemma 4.1. *Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine stetige Kurve. Sei $s_i \rightarrow s$ eine Folge in I .*

Dann gilt

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \rho_{PPP}[\gamma](s_i) \leq \rho_{PPP}[\gamma](s), \quad (45)$$

d.h. ρ_{PPP} ist oberhalbstetig.

Beweis: Sei $\Theta := \limsup_{i \rightarrow \infty} \rho_{PPP}[\gamma](s_i)$. Für $\Theta = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\infty \geq \Theta > 0$ (d.h. wir lassen $\Theta = \infty$ zu). Angenommen $\rho_{PPP}[\gamma](s) < \Theta$, dann existieren $t_1 \neq t_2 \in I$ verschieden von s mit

$$R(\gamma(s), \gamma(t_1), \gamma(t_2)) =: \eta < \Theta.$$

OBdA sei $\{s_i\}_i$ schon eine Maximalfolge von (45) mit $s_i \rightarrow s$, d.h. $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{PPP}[\gamma](s_i) = \Theta$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) *Falls $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \gamma(s)$ paarweise verschieden:* Wegen

$$R(\gamma(t_1), \gamma(s), \gamma(t_2)) = \frac{|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|}{2 \sin \angle(\gamma(t_1) - \gamma(s), \gamma(s) - \gamma(t_2))} = \eta < \Theta \leq \infty$$

folgern wir $\sin \angle(\gamma(t_1) - \gamma(s), \gamma(s) - \gamma(t_2)) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit des Sinus und des Winkels folgern wir (beachte: für i groß genug gilt $\gamma(t_1) \neq \gamma(s_i) \neq \gamma(t_2)$)

$$\sin \angle(\gamma(t_1) - \gamma(s_i), \gamma(s_i) - \gamma(t_2)) \rightarrow \sin \angle(\gamma(t_1) - \gamma(s), \gamma(s) - \gamma(t_2)) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Insgesamt also $R(\gamma(s_i), \gamma(t_1), \gamma(t_2)) \rightarrow \eta$ und damit

$$\eta \leftarrow R(\gamma(s_i), \gamma(t_1), \gamma(t_2)) \geq \rho_{PPP}[\gamma](s_i) \rightarrow \Theta > \eta \quad \text{für } i \rightarrow \infty,$$

was ein Widerspruch ist.

- (ii) *Falls $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \gamma(s)$ nicht paarweise verschieden:* Wir behandeln zunächst den Fall, dass $\gamma(s) = \gamma(t)$ Doppelpunkt ist (für $t = t_1$ oder $t = t_2$). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \rho_{PPP}[\gamma](s_i) &\leq R(\gamma(s_i), \gamma(s), \gamma(t)) = \frac{\text{diam}(\{\gamma(s_i), \gamma(s), \gamma(t)\})}{2} \\ &= \frac{|\gamma(s_i) - \gamma(s)|}{2} \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

also $\Theta = 0$ und es ist nichts zu zeigen.

Sei also $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Dann gilt

$$R(\gamma(s_i), \gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \frac{\text{diam}(\{\gamma(s_i), \gamma(t_1), \gamma(t_2)\})}{2} = \frac{|\gamma(s_i) - \gamma(t_1)|}{2}.$$

Wegen der Stetigkeit von γ und des euklidischen Abstands gilt

$$\frac{|\gamma(s_i) - \gamma(t_1)|}{2} \rightarrow \frac{|\gamma(s) - \gamma(t_1)|}{2} = \eta \quad \text{für } i \rightarrow \infty,$$

so dass folgender Widerspruch auftritt:

$$\eta \leftarrow R(\gamma(s_i), \gamma(t_1), \gamma(t_2)) \geq \rho_{PPP}[\gamma](s_i) \rightarrow \Theta > \eta \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Also ist $\rho_{PPP}[\gamma](s) \geq \Theta$. □

Im obigen Beweis ist der Fall $\Theta = \infty$ bemerkenswert, denn mit Lemma 4.3, dessen Beweis wir nun angehen, folgt, dass γ dann auf einer Geraden liegen muss.

Lemma 4.2. *Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine stetige Kurve. Gilt für ein $s \in I$*

$$\rho_{PPP}[\gamma](s) = \infty,$$

so liegt γ auf einer Geraden und ist injektiv. Und daher gilt $\rho_{PPP}[\gamma](t) = \infty$ für alle $t \in I$.

Beweis: Die Gleichung $\rho_{PPP}[\gamma](s) = \infty$ bedeutet, dass $\gamma(s), \gamma(\sigma), \gamma(\tau)$ für alle paarweise verschiedenen $\sigma, \tau \in I \setminus \{s\}$ kollinear sind. Halten wir τ fest, so sehen wir ein, dass $\gamma(\sigma)$ auf der Geraden durch $\gamma(s)$ und $\gamma(\tau)$ liegt, also liegt ganz γ auf dieser Geraden.

Außerdem ist γ injektiv, denn gäbe es $\sigma \in I, \sigma \neq s$ mit $\gamma(\sigma) = \gamma(s)$, so folgt nach Lemma 3.8 der Widerspruch $\rho_{PPP}[\gamma](s) = 0$. Gäbe es $\sigma \neq \tau \in I \setminus \{s\}$ mit $\gamma(\sigma) = \gamma(\tau)$, so folgt nach Definition und wegen der Kompaktheit von I

$$\rho_{PPP}[\gamma](s) \leq R(\gamma(s), \gamma(\sigma), \gamma(\tau)) = \frac{|\gamma(s) - \gamma(\sigma)|}{2} < \infty,$$

was ebenfalls ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Sei $t \in I$ also beliebig und seien $\sigma, \tau \in I \setminus \{s\}$ mit $\sigma \neq \tau$. Dann sind $\gamma(t), \gamma(\sigma), \gamma(\tau)$ kollinear und paarweise verschieden, also folgt

$$\rho_{PPP}[\gamma](t) = \infty \quad \forall t \in I.$$

□

In [SvdM03a, Lemma 1, S. 44] wurde gezeigt, dass für geschlossene Kurven γ

$$\rho_{PPP}[\gamma](s) \leq \frac{\text{diam}(\gamma(I))}{2} \quad \forall s \in I$$

gilt. Das vorige Lemma zeigt, dass wir ein so gutes Ergebnis nicht erwarten können. Allerdings zeigt das folgende Lemma, dass ρ_{PPP} nur für Teilstücke von Geraden unbeschränkt ist. Man beachte, dass hierbei die Kompaktheit von I wesentlich ist.

Lemma 4.3. *Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine stetige Kurve und sei $\{s_i\}_i$ eine Folge in I mit*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{PPP}[\gamma](s_i) = \infty. \quad (46)$$

Dann liegt γ auf einer Geraden und ist injektiv.

Beweis: Da I kompakt ist, können wir aus $\{s_i\}_i$ eine konvergente Teilfolge auswählen, die wir wieder mit $\{s_i\}_i$ bezeichnen und die gegen einen Grenzparameter $s \in I$ konvergiert. Damit erfüllt $\{s_i\}$ die Voraussetzungen von Lemma 4.1 und wir folgern

$$\rho_{PPP}[\gamma](s) \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \rho_{PPP}[\gamma](s_i) = \infty,$$

also $\rho_{PPP}[\gamma](s) = \infty$. Mit Lemma 4.2 folgt dann die Behauptung. □

Auch ρ_{PT} ist oberhalbstetig:

Lemma 4.4. *Sei $\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, stetige, injektive Kurve. Sei $\{s_i\}_i \subset I$ eine Folge mit $s_i \rightarrow s \in I$.*

Dann gilt

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \rho_{pt}[\Gamma](s_i) \leq \rho_{pt}[\Gamma](s), \quad (47)$$

d.h. ρ_{pt} ist oberhalbstetig.

Beweis: Sei $\Theta := \limsup_{i \rightarrow \infty} \rho_{pt}[\Gamma](s_i)$. Für $\Theta = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\infty \geq \Theta > 0$. Angenommen $\rho_{pt}[\Gamma](s) < \Theta$, dann existiert ein von s verschiedenes

$$t \in I' := \{r \in I \mid \Gamma'(r) \text{ existiert und } |\Gamma'(r)| \neq 0\}$$

mit

$$pt(s, t) =: \eta < \Theta.$$

OBdA sei $\{s_i\}_i$ schon eine Maximalfolge von (47), d.h. $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{pt}[\Gamma](s_i) = \Theta$. Da Γ injektiv ist, gilt $\Gamma(t) \neq \Gamma(s)$. Wegen

$$pt(s, t) = \frac{|\Gamma(t) - \Gamma(s)|}{2 \sin \angle(\Gamma(t) - \Gamma(s), \Gamma'(t))} = \eta < \Theta \leq \infty$$

folgern wir $\sin \angle(\Gamma(t) - \Gamma(s), \Gamma'(t)) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit des Sinus und des Winkels ergibt sich (beachte $\Gamma(t) \neq \Gamma(s_i)$ für i groß genug)

$$\sin \angle(\Gamma(t) - \Gamma(s_i), \Gamma'(t)) \rightarrow \sin \angle(\Gamma(t) - \Gamma(s), \Gamma'(t)) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Insgesamt also $pt(s_i, t) \rightarrow \eta$ und damit

$$\eta \leftarrow pt(s_i, t) \geq \rho_{pt}[\Gamma](s_i) \rightarrow \Theta > \eta \quad \text{für } i \rightarrow \infty,$$

was ein Widerspruch ist. □

Bemerkung 4.5. *Die Injektivität der obigen Kurve ist notwendig. Man betrachte dazu folgendes Beispiel: Sei $\Gamma : I = [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ die Parametrisierung eines Kreises mit Radius $r > 0$ und $\Gamma(0) = \Gamma(L)$. Sei $\{s_i\} \subset I$ eine Nullfolge mit $s_i > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\rho_{pt}[\Gamma](0) = 0$, aber $\rho_{pt}[\Gamma](s_i) \equiv r > 0$.*

Bemerkung 4.6. *Die Aussage von Lemma 4.2 gilt so nicht für ρ_{pt} , wie folgendes Beispiel zeigt:*

Seien $T_1, T_2, T_3 \in \mathbb{S}^2$ paarweise nicht parallel. Setze

$$\Gamma : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Gamma(s) := \begin{cases} sT_1 & \text{für } s \in [0, 1] \\ T_1 - (s-1)T_1 & \text{für } s \in (1, 2] \\ (s-2)T_2 & \text{für } s \in (2, 3] \\ T_2 - (s-3)T_2 & \text{für } s \in (3, 4] \\ (s-4)T_3 & \text{für } s \in (4, 5] \end{cases}.$$

Die so definierte Kurve Γ ist nach Bogenlänge parametrisiert, differenzierbar auf ganz $[0, 5] \setminus \{1, 2, 3, 4\}$ und es gilt

$$\rho_{pt}[\Gamma](0) = \rho_{pt}[\Gamma](2) = \rho_{pt}[\Gamma](4) = \infty.$$

Aber natürlich ist $\Delta_{pt}[\Gamma] = 0$.

Bemerkung 4.7. Im allgemeinen ist $\rho_{ppp}[\Gamma](\cdot)$ nicht stetig, wie ein Beispiel von SCHURICHT und VON DER MOSEL ([SvdM04, Anhang A]) zeigt. Es ist, wie sich bei genauerer Betrachtung herausstellt, ebenso ein Beispiel für die Unstetigkeit von $\rho_{pt}[\Gamma](\cdot)$.

Ein anderes Beispiel ist Abbildung 5f auf Seite 17. Nährt man sich in einer Folge von Punkten dem Knick, so geht $\rho_{ppp}[\Gamma](\cdot)$ gegen 0. Im Knick selbst springt $\rho_{ppp}[\Gamma](\cdot)$ nach oben.

Literatur

- [Alt92] H.W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, Berlin, 2. Auflage, 1992.
- [B81] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, 1981.
- [CFKSW04] J. Cantarella, J.H.G. Fu, R.B. Kusner, J.M. Sullivan, N.C. Wrinkle: *Criticality for the Gehring Link Problem*, ArXiv eprint math.DG/0402212.
- [CKS02] J. Cantarella, R.B. Kusner, J.M. Sullivan, *On the minimum rope-length of knots and links*, Inv. math. online publ. DOI 10.1007/s00222-002-0234-y (June 2002).
- [FW94] M.H. Freedman, Z. He, Z. Wang: *Möbius energy of knots and unknots*, Ann. of Math. (2), 139(1):1-50, 1994

LITERATUR

- [GdlL03] O. Gonzales, R. de la Llave: *Existence of Ideal Knots*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 12, No. 1 (2003) 123-133.
- [GH96] M. Giaquinta, S. Hildebrandt: *Calculus of Variations II: Hamiltonian Formalism (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften)*, Springer, Berlin, 1996.
- [GM99] O. Gonzalez, J.H. Maddocks: *Global Curvature, Thickness and the Ideal Shapes of Knots*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **96** (1999) 4769-4773.
- [GMS02] O. Gonzalez, J.H. Maddocks and J. Smutny, *Curves, circles and spheres*, Contemporary Mathematics 2002, 195-215.
- [GMSvdM02] O. Gonzalez, J.H. Maddocks, F. Schuricht, H. von der Mosel, *Global curvature and self-contact of nonlinearly elastic curves and rods*, Calc. Var. 14 (2002), 29-68.
- [KS98] R.B. Kusner, J.M. Sullivan: *On distortion and thickness of knots*, IMA Volumes in Math. and its Applications 103, Springer, 1998, 67-78.
- [LdM02] *Lexikon der Mathematik*, Spektrum, 2002.
- [Nat54] I.P. Natanson: *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1954.
- [O'H91] Jun O'Hara: *Energy of a knot*, 30(2): 241-247, 1991.
- [RS02] E.J. Rawdon, J. Simon: *Möbius energy of thick knots*, Topology Appl. 125(1): 97-109, 2002.
- [S04] Jana Smutny, *Global radii of curvature and the biarc approximation of space curves: In pursuit of ideal knot shapes*, <http://library.epfl.ch/theses/?display=detail&nr=2981>, 2004.
- [SKK99] A. Stasiak, V. Katritch, L.H. Kauffman, *Ideal Knots*, World Scientific Publishing Company, 1999.
- [SvdM03a] F. Schuricht, H. von der Mosel, *Global curvature for rectifiable loops*, Math. Z. 243 (2003), 37-77.
- [SvdM03b] F. Schuricht, H. von der Mosel: *Euler-Lagrange equations for nonlinearly elastic rods with self-contact*, Arch. Rat. Mech. Anal. 168 (2003), 35-82.
- [SvdM04] F. Schuricht, H. von der Mosel: *Characterization of Ideal Knots*, Calc. Var. 19 (2004), 281-305.